# اتصال دالة عددية

## I. الاتصال في نقطة

### 1. تعريف

$f$ متصلة في $x_0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

### 2. الاتصال على اليمين-الاتصال على اليسار

$f$ متصلة على اليمين في $x_0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$f$ متصلة على اليسار في $x_0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

### 3. خاصية

$f$ متصلة على اليمين وعلى اليسار في $x_0$ $\Leftrightarrow$ $f$ متصلة في $x_0$

## II. الاتصال على مجال

### 1. الاتصال على مجال

- تكون $f$ متصلة على مجال مفتوح $]a;b[$ إذا كانت $f$ متصلة في كل عنصر من المجال $]a;b[$
- تكون $f$ متصلة على مجال مغلق $[a;b]$ إذا كانت $f$ متصلة على المجال المفتوح $]a;b[$ و متصلة على اليمين في $a$ وعلى اليسار في $b$
- نعرف بالمثل اتصال $f$ على كل من المجالات $]a;b]$ و $[a;b[$ و $]a;+\infty[$ و $]-\infty;+\infty[$

### 2. العمليات على الدوال المتصلة

لتكن $f$ و $g$ دالتين متصلتين على مجال $I$ و $k$ عدد حقيقي

- الدوال $f+g$ و $f\times g$ و $kf$ متصلة على $I$
- إذا كانت $g$ لا تنعدم على $I$ فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتين على $I$
- إذا كانت $f$ متصلة على $I$ فإن $f^n$ و $|f|$ متصلة على $I$
- إذا كانت $f$ متصلة وموجبة على $I$ فإن الدالة $x \to \sqrt{f(x)}$ متصلة أيضا على $I$

### 3. نتائج

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$

- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالة $x \to \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^{+}$
- الدالتان sin و cos متصلتان على $\mathbb{R}$
- الدالة tan متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

### 4. صورة مجال بدالة متصلة

- صورة مجال $I$ بدالة متصلة $f$ هو مجال و نرمز له ب $f(I)$
- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة

### 5. صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعا

| المجال $I$ | $f$ تزايدية قطعا | $f$ تناقصية قطعا |
|---|---|---|
| $[a;b]$ | $[f(a);f(b)]$ | $[f(b);f(a)]$ |
| $]a;b[$ | $\left]\lim_{x\to a^+} f(x);\lim_{x\to b^-} f(x)\right[$ | $\left]\lim_{x\to b^-} f(x);\lim_{x\to a^+} f(x)\right[$ |
| $[a;b[$ | $\left[f(a);\lim_{x\to b^-} f(x)\right[$ | $\left]\lim_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$ |
| $]a;b]$ | $\left]\lim_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$ | $\left[f(b);\lim_{x\to a^+} f(x)\right[$ |
| $[a;+\infty[$ | $\left[f(a);\lim_{x\to +\infty} f(x)\right[$ | $\left]\lim_{x\to +\infty} f(x);f(a)\right]$ |
| $]a;+\infty[$ | $\left]\lim_{x\to a^+} f(x);\lim_{x\to +\infty} f(x)\right[$ | $\left]\lim_{x\to +\infty} f(x);\lim_{x\to a^+} f(x)\right[$ |
| $]-\infty;a]$ | $\left]\lim_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$ | $\left[f(a);\lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$ |
| $]-\infty;a[$ | $\left]\lim_{x\to -\infty} f(x);\lim_{x\to a^-} f(x)\right[$ | $\left]\lim_{x\to a^-} f(x);\lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$ |
| $\mathbb{R}$ | $\left]\lim_{x\to -\infty} f(x);\lim_{x\to +\infty} f(x)\right[$ | $\left]\lim_{x\to +\infty} f(x);\lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$ |

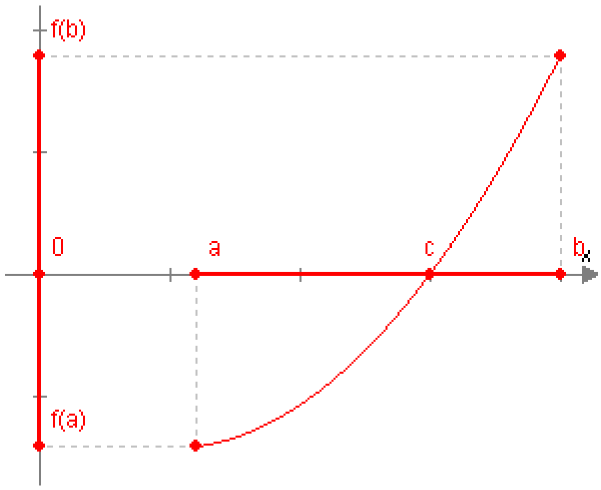
## III. مبرهنة القيم الوسيطية

**مبرهنة** 1

إذا كانت $f$ متصلة على المجال $[a;b]$

وكان $f(a) \times f(b) < 0$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a;b[$




**مبرهنة** 2

إذا كانت $f$ متصلة على المجال $[a;b]$

وكانت $f$ رتيبة قطعا على المجال $[a;b]$

وكان $f(a) \times f(b) < 0$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a;b[$

**ملاحظة**

العبارات التالية متكافئة

- المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a;b[$
- $(C_f)$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها $\alpha$ حيث $a < \alpha < b$
- يوجد على الأقل $\alpha$ في المجال $]a;b[$ بحيث $f(\alpha) = 0$

للإجابة على إحدى هذه العبارات نستعمل مبرهنة القيم الوسيطية

# الدالة العكسية

## I. تعاريف و خاصيات

### 1. خاصية

إذا كانت $f$ متصلة و رتيبة قطعا على مجال $I$ فإن $f$ تقبل دالة عكسية معرفة من المجال $f(I)$

نحو المجال $I$ ويرمز لها ب $f^{-1}$

### 2. نتائج

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in f(I) \end{cases}$$

$$\forall x \in I \quad (f^{-1} o f)(x) = x$$

$$\forall y \in f(I) \quad (f o f^{-1})(y) = y$$

### 3. ملاحظة

لتحديد الدالة العكسية نستعين بالتكافئ التالي

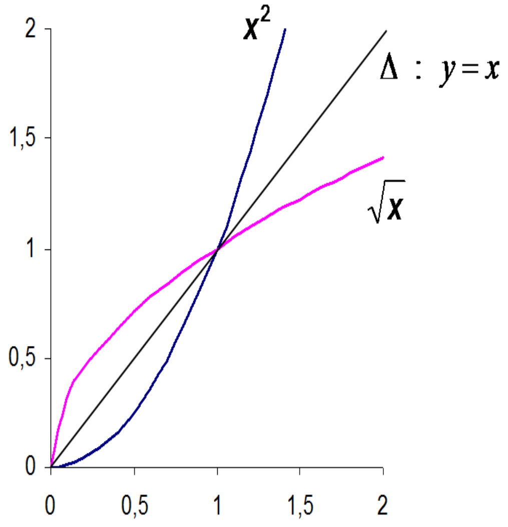
$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

### 4. خاصية

إذا كانت $f$ متصلة و رتيبة قطعا على مجال $I$

فإن

- $f^{-1}$ متصلة على $f(I)$
- $f$ و $f^{-1}$ لهما نفس التغيرات
- $(C_f)$ و $(C_{f^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم أي المستقيم ذو المعادلة $y = x$



## II. اشتقاق الدالة العكسية

### 1. **خاصية**

إذا كانت $f$ قابلة الإشتقاق في $x_0$ و $f^{'}(x_0) \neq 0$

فإن الدالة العكسية $f^{-1}$ قابلة الإشتقاق في $y_0 = f(x_0)$

$$(f^{-1})^{'}(y_0) = \frac{1}{f^{'}(x_0)}$$

### 2. **خاصية**

لتكن $f$ دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $I$

إذا كانت $f$ قابلة لإشتقاق على المجال $I$ و دالتها المشتقة $f^{'}$ لا تنعدم على المجال $I$

فإن الدالة العكسية $f^{-1}$ قابلة الإشتقاق على المجال $f(I)$

ولدينا

$$\forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

| **المنحنى** $(C_f)$ | **المنحنى** $(C_{f^{-1}})$ |
|---|---|
| $(C_f)$ يقبل مقارب عمودي معادلته $x = a$ | $(C_{f^{-1}})$ يقبل مقارب أفقي معادلته $y = a$ |
| $(C_f)$ يقبل مقارب أفقي معادلته $y = b$ | $(C_{f^{-1}})$ يقبل مقارب عمودي معادلته $x = b$ |
| $(C_f)$ يقبل مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ | $(C_{f^{-1}})$ يقبل مقارب مائل معادلته $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$ |
| $(C_f)$ يقبل مماس عمودي | $(C_{f^{-1}})$ يقبل مماس أفقي |
| $(C_f)$ يقبل مماس أفقي | $(C_{f^{-1}})$ يقبل مماس عمودي |
| $(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي | $(C_{f^{-1}})$ يقبل نصف مماس أفقي |
| $(C_f)$ يقبل نصف مماس أفقي | $(C_{f^{-1}})$ يقبل نصف مماس عمودي |

# دالة الجذر من الرتبة $n$

## 1. تعريف

الدالة $x \to x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ إذن فهي تقبل دالة عكسية معرفة على $\mathbb{R}^+$ تسمى دالة الجذر من الرتبة $n$ ونرمز لها ب $\sqrt[n]{\ }$

## 2. خاصيات

دالة الجذر من الرتبة $n$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} x = \sqrt[n]{y} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^n = y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$\forall (x;y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

$$\forall (x;y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad \sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad x > y$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

## 3. ملاحظات

$\sqrt[1]{x} = x$ و $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x}$ يسمى جذر مكعب ل $x$

## 4. عمليات على الجذور من الرتبة

ليكن $x$ و $y$ من $\mathbb{R}^+$ ولكل $n$ و $m$ من $\mathbb{N}^*$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m} \qquad y \neq 0 \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt[n]{0} = 0 \qquad \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

$$\sqrt[n]{x^P} = x^{\frac{p}{n}} \qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{1} = 1$$

$$x > 0 \ , \ \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$