EXERCICE 1

Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $g(x)=4x^3-3x-8$

1)a)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de g sur $[1;+\infty[$

c)Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[1;+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha\in[1,4\,;1,5]$

d) Déterminer le signe de $g$sur $[1;+\infty[$

2)Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^3+1}{4x^2-1}$

a) trouver le domaine de définition de la fonction f et Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b)Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{3}{8}\alpha$

c)Montrer que pour tout $x\in[1;+\infty[$ $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$

d) Etudier les variations de la fonction $f sur$ $[1;+\infty[$.

e) Montrer que f réalise une bijection de $[\alpha;+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

EXERCICE 2

$$f(x)=\begin{cases}(1+3a)x^2-3x & si \quad x\in\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right] \\ \dfrac{x^3-8}{2x^2-5x+2} & si \quad x\in\left]\dfrac{1}{2},2\right[\\ \sqrt{4x^2-1}-ax-1 & si \quad x\in[2,+\infty[\end{cases}$$

1°) Déterminer le domaine de définition de f .

2°)Etudier les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

3°) Déterminer a pour que f soit continue en 2 .

EXERCICE 3

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=-x^3+6x^2+1$. Le tableau de variations de h est le suivant :

x	$-\infty$		0		4		10		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
h		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

a) Recopier et compléter le tableau de variations.

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]-\infty;4]$.

c) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]4;10]$.

d) A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

EXERCICE 4

$\boxed{1}$ Calculer sans utiliser la calculatrice en détaillant les étapes de calcul.

$A=\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}$; $B=5^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[6]{25}$; $C=\sqrt[5]{81}\times3^{\frac{1}{5}}$.

$\boxed{2}$ 1°) Développer $\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{2}\right)^3$.

2°) En déduire la valeur exacte de $A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

$\boxed{3}$ Soit a un réel strictement positif. Simplifier $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\times\left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{\left(a^2\right)^2\times\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[5]{a^3}}$.

$\boxed{4}$ Calculer $A=\dfrac{27^{-\frac{2}{3}}\times49^{\frac{1}{2}}\times16^{\frac{5}{4}}}{\left(\sqrt[5]{243}\right)^2}$.

$\boxed{5}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt[3]{5-2x}=2$.

On commencera par préciser le domaine de résolution de l'équation.