Exercice 1 Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1° $f(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$

2° $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^3}$ (on pourra l'écrire sous la forme $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}$)

3° $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ (on pourra l'écrire sous la forme $f(x)=a\sqrt{x+1}+\dfrac{b}{\sqrt{x+1}}$)

4° $f(x)=\dfrac{2}{x^2-9}$ (on pourra l'écrire sous la forme $f(x)=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x+3}$)

Exercice 2 On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+2n-1 \end{cases}$

1° Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est elle croissante ou décroissante .

2° On pose $v_n=u_n-4n+10$. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.

3° Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

4° En déduire l'expression de v_n en fonction de n. Quelle est la limite de (v_n) ?

5° Exprimer u_n en fonction de v_n.

6° En déduire que pour tout naturel n on a $u_n=\dfrac{11}{2^n}+4n-10$.

6° Quelle est la limite de (u_n) ?

7° On pose, pour tout naturel n , $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

Montrer que $S_n=2n^2-8n+12-\dfrac{11}{2^n}$, puis en déduire sa limite.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1° Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble.

2° Déterminer trois réels a, b ; c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ puis en déduire que la courbe (C) admet 2 asymptotes que l'on déterminera.

3° Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

4° Construire la courbe (C) avec ses deux asymptotes.

5° Montrer que le point d'intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe (C).

6° Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $2x^2+(1-m)x-1-2m=0$. (on ne demande pas de résoudre l'équation).

7° a) Montrer que la restriction de f, sur l'intervalle $I=[0,+\infty[$, est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit f^{-1} la réciproque de f sur J. Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

c) Dresser le tableau de variation de f^{-1} et représenter sa courbe sur le même graphique.

Exercice 4

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(3x-5)$; $\ln(2x-5) = 0$.

b) $2\ln(x-2) + \ln(3x+1) = 2\ln 2$; $\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln 5 + 2\ln 3$.

c) $6\ln^2 x + 7\ln x - 3 = 0$; $\ln^3 x - 2\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$.

d) $2\ln(2x-1) - \ln(3x-2x^2) = \ln\left(\frac{4x-3}{x}\right)$; $\ln(x+2) + 1 = \ln(x-1) + \ln 2$.

e) $2\ln x = \ln 2 + \ln(2+\sqrt{2}) + \ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

f) $(\ln x)^2 - 7\ln x + 6 = 0$; $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(x^2 - 10x + 9) \geq \ln(3x - 27)$; $\ln[x(3-x)] \leq \ln 2$

b) $\ln(5x^2 + 6x + 1) > 0$; $2(\ln 2x)^2 - 5\ln 2x - 3 \leq 0$

Exercice 5

A) On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1°) Etudier les variations de g.

2°) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}$.

1) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x > 0$

2) Etudier les variations de f.

3) Démontrer que la courbe (Cf) admet la droite (Δ) d'équation $y = -x+3$ comme asymptote oblique. Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ).

4) Déterminer les coordonnées du point A de (Cf) où la tangente (T) à (Cf) est parallèle à (Δ). Donner une équation de cette tangente.

5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1]$; puis une solution unique β dans $[3 ; 4]$.

6) Tracer (Cf) et (Δ) dans un repère orthonormé d'unité 1cm.