Exercice 1 Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1° $f(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$

2° $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^3}$ (on pourra l'écrire sous la forme $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}$)

3° $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ (on pourra l'écrire sous la forme $f(x)=a\sqrt{x+1}+\dfrac{b}{\sqrt{x+1}}$)

4° $f(x)=\dfrac{2}{x^2-9}$ (on pourra l'écrire sous la forme $f(x)=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x+3}$)

Exercice 2 On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+2n-1 \end{cases}$

1° Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est elle croissante ou décroissante .

2° On pose $v_n=u_n-4n+10$. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.

3° Montrer que (v_n) est une suite géometrique et préciser sa raison.

4° En déduire l'expression de v_n en fonction de n. Quelle est la limite de (v_n) ?

5° Exprimer u_n en fonction de v_n.

6° En déduire que pour tout naturel n on a $u_n=\dfrac{11}{2^n}+4n-10$.

6° Quelle est la limite de (u_n) ?

7° On pose, pour tout naturel n , $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

Montrer que $S_n=2n^2-8n+12-\dfrac{11}{2^n}$, puis en déduire sa limite.

Exercice 3

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2i}$
- $\dfrac{1+4i}{1-\sqrt{2}i}$
- $\left(2+i\sqrt{3}\right)\left(5-i\right)+\left(\dfrac{1}{2}+3i\right)^2$

2) Calculer le module des nombres complexes suivants :

a) $z=\dfrac{1+i}{3-4i}$ b) $z=(2+2i)(-1+i)$ c) $z=\dfrac{i(-1-i)}{-3+4i}$ d) $z=\dfrac{-4(2-i)}{2i(1+2i)}$

3) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z_1=3$
- $z_2=-4$
- $z_3=2i$
- $z_4=-1+i$
- $z_5=-\sqrt{3}+i$
- $z_6=-17$
- $z_7=-6\sqrt{3}+6i$
- $z_8=5i$
- $z_9=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$.

Exercice 4 Soit les nombres complexes $z_1=-1-i\sqrt{3}$ et $z_2=iz_1$.

1. Ecrire z_1 sous forme algébrique.
2. a) Calculer le module et un argument de z_1 et de z_2.
   b) Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2.
   c) Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que $z_A=-2+2i\sqrt{3}$, $z_B=2-2i\sqrt{3}$ et $z_c=8$.
   Montrer que $z_A=2\overline{z_1}$ et que $z_B=-z_A$.
3. a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
   b) Calculer $|z_A-z_B|$, $|z_B-z_C|$ et $|z_A-z_C|$.
   c) En déduire que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 5

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x-2)+\ln(x+1)=\ln(3x-5)$; $\ln(2x-5)=0$.

b) $2\ln(x-2)+\ln(3x+1)=2\ln 2$; $\ln(x+2)+\ln(x-2)=\ln 5+2\ln 3$.

c) $6\ln^2x+7\ln x-3=0$; $\ln^3x-2\ln^2x-\ln x+2=0$.

d) $2\ln(2x-1)-\ln(3x-2x^2)=\ln\left(\frac{4x-3}{x}\right)$; $\ln(x+2)+1=\ln(x-1)+\ln 2$.

e) $2\ln x=\ln 2+\ln(2+\sqrt{2})+\ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})+\ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

f) $(\ln x)^2-7\ln x+6=0$; $2(\ln x)^2-3\ln x+1=0$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln\left(x^2-10x+9\right)\geq\ln(3x-27)$; $\ln[x(3-x)]\leq\ln 2$

b) $\ln\left(5x^2+6x+1\right)>0$; $2(\ln 2x)^2-5\ln 2x-3\leq 0$

Exercice 6

A) On considère la fonction g définie par $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1°) Etudier les variations de g.

2°) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par $f(x)=-x+3+\frac{\ln x}{x}$.

1) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x>0$

2) Etudier les variations de f.

3) Démontrer que la courbe (Cf) admet la droite (Δ) d'équation $y=-x+3$ comme asymptote oblique. Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ).

4) Déterminer les coordonnées du point A de (Cf) où la tangente (T) à (Cf) est parallèle à (Δ). Donner une équation de cette tangente.

5) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]0\,;1]$; puis une solution unique β dans $[3\,;4]$.

6) Tracer (Cf) et (Δ) dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

Exercice 7

A) On considère la fonction g définie par $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1°) Etudier les variations de g.

2°) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par $f(x)=-x+3+\frac{\ln x}{x}$.

1°) Etudier les variations de f.

2°) Démontrer que la courbe (Cf) admet la droite (Δ) d'équation $y=-x+3$ comme asymptote oblique. Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ).

3°) Déterminer les coordonnées du point A de (Cf) où la tangente (T) à (Cf) est parallèle à (Δ). Donner une équation de cette tangente.

4°) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]0\,;1]$; puis une solution unique β dans $[3\,;4]$.

5°) Tracer (Cf) et (Δ) dans un repère orthonormé d'unité 1cm.