# Exercice 1

On considère la suite des intégrales suivantes : $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$, $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx, \dots, I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}\,dx, \dots$

1. (a) Calculer $I_1$.
   (b) Calculer $I_0 + I_1$ et en déduire $I_0$.
   (c) Pour tout entier $n$, calculer $A_n = \int_0^1 e^{nx}\,dx$, et en déduire $I_{n+1} + I_n$.
2. (a) Déterminer le sens de variation de $(I_n)$.
   (b) Prouver que pour tout $x \in [0;1]$ on a $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$
   (c) En déduire un encadrement de $I_n$.
   (d) En déduire la limite de $(I_n)$.

# Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité 3 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

1. On pose $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout $x \neq -1$, $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
   (b) En déduire I.
2. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question précédente, calculer en cm$^2$ l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

# Exercice 3

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ , d'unité graphique 1 cm on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = \frac{3}{2} + 6\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2} - 6\mathrm{i}$ ; $z_{\mathrm{C}} = -3 - \frac{1}{4}\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{P}} = 3 + 2\mathrm{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = -1 + \frac{5}{2}\mathrm{i}$.
   (a) Déterminer l'affixe $z_{\mathrm{Q}}$ du point Q, image du point B dans la translation $t$ de vecteur $\overrightarrow{w}$.
   (b) Déterminer l'affixe $z_{\mathrm{R}}$ du point R, image du point P par l'homothétie $h$ de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.
   (c) Déterminer l'affixe $z_{\mathrm{S}}$ du point S, image du point P par la rotation $r$ de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   Placer les points P, Q, R et S.
2. (a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.
   (b) Calculer $\frac{z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{Q}}}{z_{\mathrm{P}} - z_{\mathrm{Q}}}$.
   En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.
   (c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathcal{C}$. On calculera l'affixe de son centre $\Omega$ et son rayon $\rho$.
3. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$ ?

**Exercice-4**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left[(x + (1-x)\mathrm{e}^{2x}\right]$.

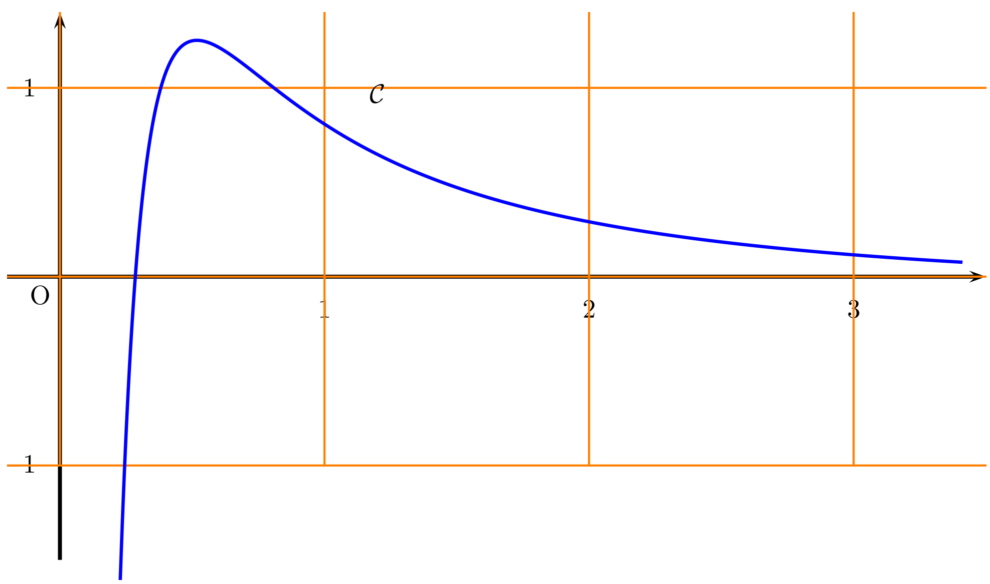
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 2 cm)

1. (a) Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$.
2. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1-2x)\mathrm{e}^{2x}$.
   (a) Étudier le sens de variation de $u$.
   Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[0\ ,1]$.
   Déterminer une valeur décimale approchée par excès de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.
   (b) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de $x$.
4. (a) Étudier le sens de variation de $f$ puis dresser son tableau de variations.
   (b) Construire la courbe $\mathcal{C}$

**Exercice- 5**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1 + \ln(x)}{x^2}$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :




1. a) Étudier la limite de $f$ en 0.
   b) Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ ? En déduire la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
   c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.
2. a) On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}$.
   b) Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   c) Dresser le tableau des variations de la fonction $f$.
3. a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
   b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $I_n$ l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.
   a) Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.
   Montrer-que la fonction $F$, définie-par $F(x) = \dfrac{-2 - \ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b) Calculer $I_n$ en fonction de $n$.
   c) Étudier la limite de $I_n$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.