Exercice 1 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in IN : u_{n+1} = 3u_n + 8$$

1-calculer le troisième terme de la suite $(u_n)_n$ et déduire que $(u_n)_n$ n'est ni arithmétique ni géométrique

2-Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $v_n = u_n + 4$.

a)Montrer que $(v_n)_n$ est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

b) Calculer v_n *puis* u_n en fonction de n.

c) Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{1+2u_{n-1}} : \forall n \geq 2 \end{cases}$

Et soit $(v_n)_{n\geq 1}$ telle que : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1-monter que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme 2-Calculer v_n *puis* u_n en fonction de n.

3-On pose : $w_n = 2^{v_n}$ pour $n \in IN^*$

i-déterminer la nature de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$.

ii-Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} w_k$.

Exercice 3 :

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ *et* $(b_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par :

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{3} \\ a_{n+1} = \dfrac{n+3+2na_n}{3n+3} : \forall n \in IN^* \end{cases} \qquad b_n = n(1-a_n)$$

1-montrer que : $\forall n \in IN^* : a_n \prec 1$ et que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

2-montrer que $(b_n)_n$ est une suite géométrique

3-calculer a_n en fonction de n .

4-calculer en fonction de n la somme suivante :

$S_n = \sum_{k=1}^{n} ka_k$.

Exercice 4 :

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2} + 3}{u_n + 1} : \forall n \in IN \end{cases}$$

1-montrer que : $\forall n \in IN : 0 \leq u_n < 3$.

2-montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

3-montrer que :

$$\forall n \in IN^* : 0 < 3 - u_n < \frac{3}{4}(3 - u_{n-1})$$

4-déduire que : $\forall n \in IN : 0 < 3 - u_n < 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

Exercice 5 :

Soit la suite : $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + \dfrac{1}{u_{n-1}}\right) \\ u_1 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

1-montrer que : $\forall n IN^* : u_n > \sqrt{2}$.

2-a)montrer que :

$$\forall n \in IN^* : u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b)déduire :

$$\forall n \in IN : u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$$

et que : $\forall n \in IN : u_n - \sqrt{2} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 6 :

Soient les suites :

$\begin{cases} u_0 = 5; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \end{cases} \forall n \in IN$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$

1-déterminer la nature de la suite $(v_n)_n$.

2-déterminer de deux manières la somme Suivante : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} w_k$ et déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7 :

Calculer les sommes suivantes :

$A_n = 3 + 5 + 7 + ... + 2015$

$B_n = 1 + 3 + 9 + 27 + ... + 59049$

$C_n = \dfrac{1}{3} + 1 + \dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{3} + ... + 7$

$D_n = 18 + 54 + 162 + ... + 39366$

Exercice 8 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x+3}$ et $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in IN$$

1-donner le tableau des variations de f.
2-en utilisant les variations de f montrer que :
a) $\forall n\in IN : 0 \prec u_n \prec 1$
b)la suite est strictement croissante .
3-montrer que :
$(\exists k \in]0,1[);(\forall n\in IN) : |u_{n+1}-1| \le k|u_n -1|$
4-en déduire que : $\forall n\in IN : |u_n -1| \le k^{n+1}$.

Exercice 9 : soit la suite :
1-montrer que : $\forall n\in IN : 0 \le u_n \prec 1$ et que la suite est strictement croissante.
2-on pose : $v_n = \sqrt{u_n} -1$
a)étudier la nature de la suite $(v_n)_n$.
b)calculer v_n *puis* u_n en fonction de n ainsi que la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k}$.

Exercice 10 :
$(u_n)_{n\ge1}$ est une suite arithmétique dont les termes sont toutes non nulles.
1-m q : $\dfrac{1}{u_1u_2}+\dfrac{1}{u_2u_3}+....+\dfrac{1}{u_nu_{n+1}}=\dfrac{n}{u_1u_{n+1}}$
2-calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$T_n = \frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+....+\frac{1}{99\times100}$$

Exercice 11 : mini test 2013-2014
$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites définies par

$$\begin{cases} u_1 = 1; v_1 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n+v_n}{6}; v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} : \forall n\in IN^* \end{cases}$$

1-montrer que : $\forall n\in IN^* : u_n \prec v_n$
2-montrer que $(u_n)_n$ est croissante et que $(v_n)_n$ est décroissante.
3-montrer que :
$\forall n\in IN^* : v_{n+1}-u_{n+1} \le \dfrac{5}{6}(v_n - u_n)$.
4-déduire que : $\forall n\in IN^* : v_n - u_n \le 6\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$
5-m q : $\forall \in IN^* : 3u_{n+2}-4u_{n+1}+u_n = 0$
6-on pose pour $n\in IN$: $w_n = u_{n+1}-u_n$
a)monter que $(w_n)_n$ est géométrique et déterminer sa raison.
b)calculer de deux manières différentes la somme suivante : $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} w_k$.
c)en déduire u_n *puis* v_n en fonction de n

Exercice 12 : test 2012-2013
Soit la suite $(u_n)_n$ définie par :
$u_0 = -1$ et $\forall n\in IN : u_{n+1} = \dfrac{4+u_n}{5-u_n}$
1-montrer que : $\forall n\in IN : -1 \le u_n \prec 2$
2-étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$
3-on pose :pour $n\in IN$: $v_n = \dfrac{1+u_n}{2-u_n}$.
a)montrer que (v_n) est arithmétique et déterminer sa raison r ainsi que son premier terme
b) Calculer v_n *puis* u_n en fonction de n.
4- Soit $(w_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \left(u_n + \dfrac{5}{n+1}\right)w_n : \forall n\in IN \end{cases}$$ et on pose :

$x_n = \dfrac{w_n}{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.
a)montrer que $(x_n)_n$ est géométrique puis détermine w_n en fonction de n.
b)montrer que :
$S_n = (n+1)x_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} x_k$ puis déterminer S_n en fonction de n.

Exercice 13 :
Soit les suites : $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{3u_{n-1}\times u_{n-2}}{2u_{n-1}+u_{n-2}} : \forall n \ge 2 \end{cases}$ et $v_n = \dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_{n-1}}$.
1-montrer que $(v_n)_{n\ge1}$ est géométrique en déterminant sa raison q et son premier terme.
2-calculer la somme : $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ en déduire l'expression de u_n en fonction de n.