FONCTION LOGARITHME NEPERIEN
EXERCICES

Exercice n°1.

1) Exprimer en fonction de ln 2 les nombres suivants : $A = \ln 8$ $\quad B = \ln\frac{1}{16}$ $\quad C = \frac{1}{2}\ln 16$ $\quad D = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}$

2) Exprimez en fonction de ln 2 et ln 3 les réels suivants : $a = \ln 24$ $\quad b = \ln 144$ $\quad c = \ln\frac{8}{9}$

3) Ecrire les nombres A et B à l'aide d'un seul logarithme : $A = 2\ln 3 + \ln 2 + \ln\frac{1}{2}$ $\quad B = \frac{1}{2}\ln 9 - 2\ln 3$

Exercice n°2.
Compléter le tableau suivant, à partir de certaines valeurs (arrondies à 0,1) près de la fonction logarithme népérien

a	2	3	4	6	9	8	27	72	216	$\ln\left(\frac{1}{6}\right)$	$\ln\left(\frac{1}{16}\right)$
$\ln(a)$	0,7	1,1									

Exercice n°3. Comparez les réels x et y : $\quad x = 3\ln 2$ et $y = 2\ln 3$ $\quad x = \ln 5 - \ln 2$ et $y = \ln 12 - \ln 5$

Exercice n°4. Simplifier au maximum : $a = \ln\left(e^2\right)$ $\quad b = \ln\left(e^3\right)$ $\quad c = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$ $\quad d = \ln\left(\sqrt{e}\right)$ $\quad e = \ln\left(e\sqrt{e}\right)$

Exercice n°5.
Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est le Pascal. La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à 20×10^{-6} Pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont le niveau se mesure en décibels. On note $p_0 = 20\times 10^{-6}$. Pour une pression de p Pascals s'exerçant sur le tympan, avec $p \geq p_0$, le niveau sonore perçu est égale à $f(p) = \frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000p\right)$

1) Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de 2 Pascals? 0,2 Pascals? 0,02 Pascals? Calculer $f(p_0)$.
2) A partir d'un niveau sonore de 120 décibels, on ressent une douleur. Déterminer la pression p correspondant à ce niveau sonore.
3) Montrer que pour tout réel $x \geq p_0$: $f(10x) = 20 + f(x)$. *On en déduit "le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par* 10*".*
4) Exprimer, pour tout réel $x \geq p_0$, $f(100x)$ en fonction de $f(x)$ et énoncer la propriété du niveau sonore correspondante.

Exercice n°6. Précisez l'ensemble de définition puis résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(2+5x) = \ln(x+6)$ $\quad$ **2)** $\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln 3$ $\quad$ **3)** $\ln x = 2$ $\quad$ **4)** $\frac{2(1+\ln x)}{x} = 0$

5) $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$ $\quad$ **6)** $\ln(2x-5) = 1$ $\quad$ **7)** $\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = 0$ $\quad$ **8)** $\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right) = 0$

9) $\ln(x-1) = \ln(2x-1)$ $\quad$ **10)** $\ln(|x-1|) = \ln(2x-1)$ $\quad$ **11)** $\ln(|x-1|) = \ln(|2x-1|)$

Exercice n°7.
1) Développer l'expression : $A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$
2) Résoudre les équations suivantes : **(a)** $\ln\left(x^3+2\right) = \ln\left(2x^2+x\right)$. $\quad$ **(b)** $\ln\left(|x|^3+2\right) = \ln\left(2x^2+|x|\right)$
(c) $\ln\left(x^3-x^2-3x+3\right) = \ln\left(x^2-2x+1\right)$. $\quad$ **(d)** $\ln\left(x^3-x^2-3x+3\right) = 2\ln(1-x)$.

Exercice n°8.

Résoudre le système d'équations suivant : 1) $\begin{cases} x - y = \frac{3}{2} \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases}$ $\quad$ 2) $\begin{cases} 5\ln x + 2\ln y = 26 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{cases}$ $\quad$ 3) $\begin{cases} \ln xy = 4 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases}$

Exercice n°9. Précisez l'ensemble de définition puis résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(2+5x) \leq \ln(x+6)$ **2)** $\ln(x-1)+\ln(x-3) < \ln 3$ **3)** $\ln x \geq 2$ **4)** $\dfrac{2(1+\ln x)}{x} > 0$

5) $(\ln x)^2 + \ln x - 6 \leq 0$ **6)** $\ln(2x-5) \geq 1$ **7)** $(1,2)^n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$ **8)** $(0,8)^n \leq 0,1$, $n \in \mathbb{N}$

Exercice n°10. Un capital de 5000 euros est placé à intérêts composés au taux annuel de 6%.
Déterminer le nombre d'années n à partir duquel le capital acquis sera supérieur à 12000 euros

Exercice n°11. Etudier le signe des expressions suivantes :
$A(x) = \ln x(\ln x + 1)$ $B(x) = 2x\ln(1-x)$ $C(x) = -x^2\ln(x+1)$

Exercice n°12. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(x^2+3x-4)$ **2)** $f : x \to \ln\left(\dfrac{4-x^2}{x}\right)$ **3)** $f : x \to \ln(4-x^2) - \ln x$ **4)** $f : x \to \ln(x^2-4) - \ln(-x)$

Exercice n°13. Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+\ln x)$ **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\ln x$ **3)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2 - 3\ln x)$ **4)** $\lim\limits_{x\to 0}(x-4+\ln x)$ **5)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x^2$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}$ **7)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$ **8)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (Poser $X = \dfrac{1}{x}$) **9)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ (Poser $X = 2x$)

Exercice n°14.
Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous

1) $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 1 + 2\ln x$ **2)** $f(x) = \dfrac{2\ln x}{\ln 3}$ **3)** $f(x) = \ln(4-x) + \ln x$

4) $f(x) = x\ln x - x$ **5)** $f(x) = x^2\ln x$ **6)** $f(x) = \ln(2x-5)$

7) $f(x) = \ln(-3x+1)$ **8)** $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ **9)** $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

10) $f(x) = \ln(\ln x)$ **11)** $f(x) = x\ln(2x-3)$ **12)** $f(x) = 2x(1-\ln x)$

13) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **14)** $f(x) = \dfrac{x-\ln x}{x^2}$ **15)** $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - 4$

16) $f(x) = \ln x^2$ **17)** $f(x) = (\ln x)^2$ **18)** $f(x) = \ln 1 - x^2$

Exercice n°15. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(ax+b)$, et C sa courbe représentative.

1) Déterminer les nombres a et b tels que $f(2) = 0$ et $f'(3) = \dfrac{3}{4}$
Quel est alors l'ensemble de définition de f ? Quel est le sens de variation de f ?
2) Déterminer les nombres a et b tels que la courbe C passe par le point A(2 ;0) et la tangente en A ait pour coefficient directeur –2.

Exercice n°16.

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1) Etudier le sens de variation de g

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\ln x}{x}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C). Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0;+\infty[$. Montrer que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on précisera

3) Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f

4) Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées du point B

5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une unique solution α . Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α . Montrer que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est supérieur à 1. On admettra que $0,31<\alpha<0,35$

6) Représenter succinctement la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).

Exercice n°17.

Partie I

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$

1) Etudier le sens de variations de f . Calculer le slimites de f aux bords de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de f.

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution l dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Déterminer l'entier n tel que $l\in]n;n+1[$

3) Déterminer le signe de $f(x)$

Partie II

La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ -\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) Montrer que la fonction g est continue en 0. Déterminer la limite de g en $+\infty$

2) Montrer que pour tout $x>0$, $g'(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$

3) Montrer que On calcule $g\left(\frac{1}{l}\right)=\frac{1+4l}{8l^2}$. Dresser le tableau de variation de g.

4) Donner les équations des tangentes à la courbe Γ représentative de g aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{l}$. Calculer $\lim_{x\to 0} g'(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.

5) Représenter succinctement Γ et ses tangentes dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice n°18. Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$ sur I= $]0;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$ sur I= $]0;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ I= $]0;+\infty[$

4) $f(x)=\frac{3}{3x-4}$ sur I= $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

5) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur I= $]-1;+\infty[$

6) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur I= $]-\infty;-1[$

7) $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ sur $]2;+\infty[$

8) $f(x)=\frac{1}{3x-5}$ sur $[2;+\infty[$

9) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$

10) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$

Exercice n°19.

On considère la fonction définie sur I= $[4;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x^2-3x-4}{x-2}$

1) Trouver trois réels *a,b,* et *c* tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$

2) En déduire une primitive de f sur $[4;+\infty[$

Exercice n°20. Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ sur I= $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ **2)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur I= $[1;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ sur $]1;+\infty[$ **4)** $f(x)=\tan x$ sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

Exercice n°21. Calculez les intégrales

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$ **2)** $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2}dx$ **3)** $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{4}{1-5x}dx$ **4)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2}dx$

5) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2-x}-\frac{4}{x+2}\right)dx$ **6)** $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ **7)** $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\ln(1-x)}{x-1}dx$

Exercice n°22.

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$

1) Montrez que pour tout x de $]1;+\infty[$, $f(x)=x+4+\dfrac{3}{x-1}$

2) Calculez $\displaystyle\int_4^2 \frac{x^2+3x-1}{x-1}dx$

Exercice n°23.

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{6x^2+13x+4}{3x+2}$

1) Trouver trois nombres réels a, b et c tels que pour tout x de $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$, $f(x)=ax+b-\dfrac{c}{3x+2}$

2) Calculez $\displaystyle\int_0^2 \frac{6x^2+13x+4}{3x+2}dx$

Exercice n°24. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x\ln x-x$

1) Déterminez la dérivée g' de g

2) Calculez $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$

Exercice n°25. Calculez l'intégrale I en utilisant la formule d'intégration par parties: $I=\displaystyle\int_1^e x\ln x dx$

Exercice n°26.

On considère l'application f_n définie pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_n(t)=\dfrac{1}{t\left(t^n+1\right)}$, où n est un entier strictement positif.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel t strictement positif : $f_n(t)=\dfrac{1}{t\left(t^n+1\right)}=\dfrac{at^{n-1}+b}{t^n+1}+\dfrac{c}{t}$

2) Montrer que : $\displaystyle\int_1^2 f_n(t)=\ln\left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right)$

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^{n-1}\ln t}{\left(t^n+1\right)^2}$

Exercice n°27.

On considère la suite (u_n) de réels strictement positifs, définie par : $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).

2) Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et préciser sa limite.

3) Exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de *n*.

4) Exprimer la somme $\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$ en fonction de *n*. En déduire le calcul de $u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$ en fonction de *n*.

Exercice n°28.

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et C*f* sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Donner la dérivée de *f*.
2) Donner le sens de variation de *f*.
3) Donner une équation de la tangente à C*f* au point d'abscisse 1.
4) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5) Quel est le sens de variation de la fonction G définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $G(x) = \int_1^x f(t)dt$

Exercice n°29.

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1) Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque *x* tend vers 0. *f* est-elle dérivable en 0 ?
2) Etudier le sens de variations de *f* et étudier la limite de *f* en $+\infty$
3) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[e;+\infty[$
4) Soit *T* la tangente à la courbe représentative (*C*) de *f* au point d'abscisse 1. Déterminer l'équation de *T*.
5) Tracer la courbe représentative *C*) de *f* et la droite *T* dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

6) Soit $\lambda \in]0;e]$. On opse $I(\lambda) = \int_\lambda^e f(x)dx$

a) Calculer $I(\lambda)$ pour $\lambda \in]0;e]$

b) Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0

c) En déduire l'aire de la partie d plan limité par la courbe (*C*), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $(x = 0)$ et $(x = e)$

Exercice n°30.

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = x\ln(|x|)$

1) Donner le domaine de définition *D* de la fonction *f* ; déterminer une parité éventuelle ; et étudier leslimites aux bornes du domaine de définition. Calculer pour tout *x* de *D* la dérivée de *f* (si elle existe !)
2) On étudie, pour cette question, le cas $x > 0$. Montrer qu'il existe un unique λ tel que $f'(\lambda) = 0$; montrer que l'on a ; $0,3 \le \lambda \le 0,4$ (on pourra utiliser le fait que le réel *e* tel que $\ln e = 1$ vérifie $2,5 \le e \le 3$
3) En déduire le tableau de variations de *f* (sur *D*)
4) Déterminer une primitive de *g* définie par $g(x) = \ln(x)$ (on précisera le domaine sur lequel on travaille