

Calculs dans \mathbb{C}

► Exercice 1

- a) Soit $z_1 = 3 - 2i$, quelles sont les parties réelle et imaginaire de l'inverse de z_1 ?
- b) Soit $z_2 = \frac{1 - 4i}{1 + 5i}$, écrire z_2 sous sa forme algébrique.
- c) Écrire les nombres suivants sous la forme $a + ib$ (avec a et b deux réels).
- $$\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} \quad \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^2 \quad i + \frac{1}{i}.$$

Conjugué

► Exercice 2

- a) Calculer le conjugué de $z_3 = \frac{(3 - 2i)(5 + i)}{3i(7 + 2i)}$.
- b) Montrer que pour tout nombre complexe z non-nul
$$z + \frac{1}{z} - \frac{\overline{1+z}}{\overline{z}} = \overline{z} - 1$$
- c) Soit $z = \frac{3 - 7i}{9 + 2i}$ et $z' = \frac{3 + 7i}{9 - 2i}$ montrer sans calcul que $z + z'$ est un réel et que $z - z'$ est un imaginaire pur.

Équations diverses

► Exercice 3

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

- $2z + 3\overline{z} = 5$.
- $\overline{z}^2 + 2z\overline{z} - 3 = 0$
- $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$
- $iz^2 + 2\overline{z} - i = 0$
- Quels sont les nombres complexes dont le carré est égal au conjugué ?

Ensemble de points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

► Exercice 4

Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $(z - 1)^2$ soit :

- réel ?
- imaginaire pur ?

► Exercice 5

Déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $z + \overline{z} + z\overline{z} = 0$.

Équations du second, troisième et quatrième degré

► Exercice 6

soit f la fonction définie sur \mathbb{C} par $f(z) = z^2 + z + 1$

- Quelles sont les racines de f ?
- Déterminer les nombres complexes invariants par f .
- Quels sont les nombres complexes dont l'image par f est un réel ?

► Exercice 7

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- $z^2 - 2z + 26 = 0$
- $z^4 - 8z - 9 = 0$.

► Exercice 8

Soit (E) l'équation $z^3 - 5z^2 + 19z + 25 = 0$.

- Montrer que -1 est une solution de (E) .
- Déterminer le réel a tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $z^3 - 5z^2 + 19z + 25 = (z + 1)(z^2 + az + 25)$
- Résoudre l'équation (E) dans \mathbb{C} .

► Exercice 9

À tout complexe z ($z \neq \frac{1}{2}$), on associe le complexe Z défini par :

$$Z = \frac{z - 2}{2z - 1}$$

- Déterminer les valeurs de z telles que $Z = z$.
- Déterminer les valeurs de z telles que $Z = -z$.
- Déterminer les valeurs de z telles que $Z = z^2$ (une des valeurs trouvées précédemment convient).

► Exercice 10

Soit A, B et I les points d'affixes respectives $1 + i$, $3 - i$ et 2 .

À tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$.

- Calculer les affixes des points A' et B' , images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?
- Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5 .
- Vérifier que pour tout nombre complexe z on a : $z' + 4 = (z - 2)^2$.