

### Calculs dans $\mathbb{C}$

► **Exercice 1**

- a) Soit  $z_1 = 3 - 2i$ , quelles sont les parties réelle et imaginaire de l'inverse de  $z_1$  ?
- b) Soit  $z_2 = \frac{1 - 4i}{1 + 5i}$ , écrire  $z_2$  sous sa forme algébrique.
- c) Écrire les nombres suivants sous la forme  $a + ib$  (avec  $a$  et  $b$  deux réels).
- $$\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} \quad \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^2 \quad i + \frac{1}{i}.$$

### Conjugué

► **Exercice 2**

- a) Calculer le conjugué de  $z_3 = \frac{(3 - 2i)(5 + i)}{3i(7 + 2i)}$ .
- b) Montrer que pour tout nombre complexe  $z$  non-nul 
$$z + \frac{1}{z} - \frac{\overline{1+z}}{\overline{z}} = \overline{z} - 1$$
- c) Soit  $z = \frac{3 - 7i}{9 + 2i}$  et  $z' = \frac{3 + 7i}{9 - 2i}$  montrer sans calcul que  $z + z'$  est un réel et que  $z - z'$  est un imaginaire pur.

### Équations diverses

► **Exercice 3**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

- $2z + 3\overline{z} = 5$ .
- $\overline{z}^2 + 2z\overline{z} - 3 = 0$
- $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$
- $iz^2 + 2\overline{z} - i = 0$
- Quels sont les nombres complexes dont le carré est égal au conjugué ?

### Ensemble de points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

► **Exercice 4**

Quel est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $(z - 1)^2$  soit :

- réel ?
- imaginaire pur ?

► **Exercice 5**

Déterminer et représenter l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie  $z + \overline{z} + z\overline{z} = 0$ .

### Équations du second, troisième et quatrième degré

► **Exercice 6**

soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{C}$  par  $f(z) = z^2 + z + 1$

- Quelles sont les racines de  $f$  ?
- Déterminer les nombres complexes invariants par  $f$ .
- Quels sont les nombres complexes dont l'image par  $f$  est un réel ?

► **Exercice 7**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- $z^2 - 2z + 26 = 0$
- $z^4 - 8z - 9 = 0$ .

► **Exercice 8**

Soit  $(E)$  l'équation  $z^3 - 5z^2 + 19z + 25 = 0$ .

- Montrer que  $-1$  est une solution de  $(E)$ .
- Déterminer le réel  $a$  tel que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  on ait  $z^3 - 5z^2 + 19z + 25 = (z + 1)(z^2 + az + 25)$
- Résoudre l'équation  $(E)$  dans  $\mathbb{C}$ .

► **Exercice 9**

À tout complexe  $z \left( z \neq \frac{1}{2} \right)$ , on associe le complexe  $Z$  défini par :

$$Z = \frac{z - 2}{2z - 1}$$

- Déterminer les valeurs de  $z$  telles que  $Z = z$ .
- Déterminer les valeurs de  $z$  telles que  $Z = -z$ .
- Déterminer les valeurs de  $z$  telles que  $Z = z^2$  (une des valeurs trouvées précédemment convient).

► **Exercice 10**

Soit A, B et I les points d'affixes respectives  $1 + i$ ,  $3 - i$  et  $2$ .

À tout point  $M$  d'affixe  $z$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $z' = z^2 - 4z$ .

- Calculer les affixes des points  $A'$  et  $B'$ , images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?
- Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe  $-5$ .
- Vérifier que pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $z' + 4 = (z - 2)^2$ .