



المعامل:	7	المادة:	الرياضيات
مدة الإجازة:	3س	الشعب(ة):	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها

( يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة )

### التمرين الأول ( 3 ن )

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، النقطتين  $A(0, -1, 1)$  و  $B(1, -1, 0)$  و الفلكة  $(S)$  التي معادلتها  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$  .

- 1,25 (1) بين أن مركز الفلكة  $(S)$  هي النقطة  $\Omega(1, 0, 2)$  وأن شعاعها هو  $\sqrt{3}$  و تحقق من أن  $A$  تنتمي إلى  $(S)$  .
- 1,25 (2) حدد مثلث إحداثيات المتجهة  $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$  و بين أن  $x + y + z = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى  $(OAB)$  .
- 0,5 (3) بين أن المستوى  $(OAB)$  مماس للفلكة  $(S)$  في النقطة  $A$  .

### التمرين الثاني ( 3 ن )

1 (1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 - 6z + 34 = 0$  .

(2) نعتبر ، في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  ، النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي إحداثياتها على التوالي هي :  $a = 3 + 5i$  و  $b = 3 - 5i$  و  $c = 7 + 3i$  . ليكن  $z$  لحق نقطة  $M$  من المستوى و  $z'$  لحق النقطة  $M'$  صورة  $M$  بالإزاحة  $T$  ذات المتجهة  $\vec{u}$  التي إحداثياتها  $4 - 2i$  .

0,75 أ- بين أن :  $z' = z + 4 - 2i$  ثم تحقق من أن النقطة  $C$  هي صورة النقطة  $A$  بالإزاحة  $T$  .

0,5 ب- بين أن :  $\frac{b-c}{a-c} = 2i$  .

0,75 ج- استنتج أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية وأن  $BC = 2AC$  .

### التمرين الثالث ( 3 ن )

يحتوي صندوق على ست كرات حمراء وثلاث كرات خضراء ( لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس ) .  
1 (1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

1 أ- احسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء .

1 ب- بين أن احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل هو  $\frac{16}{21}$  .

1 (2) نعتبر في هذا السؤال التجربة التالية : نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق .

احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء .

مسألة (11 ن)

I- لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $g(x) = x - 2 \ln x$  .

1) أ- احسب  $g'(x)$  لكل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$  . 0,5

ب- بين أن  $g$  تناقصية على  $]0, 2[$  وتزايدية على  $]2, +\infty[$  . 0,5

2) استنتج أن  $g(x) > 0$  لكل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$  (لاحظ أن  $g(2) > 0$ ) . 0,5

II- نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = x - (\ln x)^2$  .

ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

1) احسب  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  وأول النتيجة هندسيا . 0,75

2) أ- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  ( يمكنك وضع  $t = \sqrt{x}$  , نذكر أن :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$  ) . 0,5

ب- استنتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  وأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  ( لاحظ أن :  $f(x) = x \left( 1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right)$  ) . 0,75

ج - احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$  ثم استنتج أن المنحنى  $(C)$  يقبل ، بجوار  $+\infty$  ، فرعا شلجيميا اتجاهه 0,5

المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  .

د- بين أن المنحنى  $(C)$  يوجد تحت المستقيم  $(\Delta)$  . 0,25

3) أ- بين أن :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  و بين أن  $f$  تزايدية قطعا على  $]0, +\infty[$  . 0,75

ب- ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  . 0,25

ج- بين أن  $y = x$  هي معادلة ديكارتية لمماس المنحنى  $(C)$  في النقطة التي أفصولها 1 . 0,5

4) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $]0, +\infty[$  وأن  $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$  ( نقبل أن  $(\ln 2)^2 < \frac{1}{2}$  ) . 0,5

5) أنشئ المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C)$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( نقبل أن  $I(e, e-1)$  نقطة انعطاف 1

للمنحنى  $(C)$  و نأخذ  $e \approx 2,7$  ) .

6) أ- بين أن  $H : x \mapsto x \ln x - x$  دالة أصلية للدالة  $\ln : x \mapsto \ln x$  على المجال  $]0, +\infty[$  0,5

ثم بين أن :  $\int_1^e \ln x \, dx = 1$  .

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن :  $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$  . 0,75

ج- احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى  $(C)$  والمستقيم  $(\Delta)$  والمستقيمين اللذين معادلتاهما 0,5

$x = e$  و  $x = 1$  .

III- نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  .

1) بين أن  $1 \leq u_n \leq 2$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ( يمكنك استعمال نتيجة السؤال II-3) أ- . 0,75

2) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية . 0,5

3) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة ثم حدد نهايتها . 0,75