الثانية بكالوريا علوم فيزيائيـة الثانية بكالوريا علوم الحياة والأرض	تصحيـح الامتحان الوطنـي الموحـد للبكالوريـا	الدورة العاديـة 2009

التمرين الأول :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A\left(-2,2,8\right)$ و $B\left(6,6,0\right)$ و $C\left(2,-1,0\right)$ و $D\left(0,1,-1\right)$ و (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$.

1. لدينا : $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&0\\0&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$. إذن مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ هو $(1,2,2)$.

لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من الفضاء. لدينا : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ متجهة منظمية على المستوى (OCD). إذن :

$$M\in(OCD)\iff\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\,.\,\left(\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=0$$
$$\iff x+2y+2z=0$$

وبالتالي فإن $x+2y+2z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OCD).

2. لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من الفضاء. لدينا :

$$M\in(S)\iff\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2-x\\2-y\\8-z\end{pmatrix}\,.\,\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}6-x\\6-y\\-z\end{pmatrix}=0$$
$$\iff(-2-x)(6-x)+(2-y)(6-y)+(8-z)(-z)=0$$
$$\iff x^2+y^2+z^2-4x-8y-8z=0$$
$$\iff(x-2)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=36$$

وبالتالي فإن (S) فلكة مركزها $\Omega(2,4,4)$ وشعاعها $R=\sqrt{36}=6$.

3. أ- مسافة النقطة $\Omega(2,4,4)$ عن المستوى (OCD) هي : $d\left(\Omega,(OCD)\right)=\dfrac{\left|2+(2\times4)+(2\times4)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{18}{3}=6=R$.

ب- بما أن $d\left(\Omega,(OCD)\right)=R$، فإن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S).

جـ- لدينا : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-2\\2\\8\end{pmatrix}\,.\,\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}=(-2\times6)+(2\times6)+(8\times0)=-12+12=0$.

بما أن : $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB}=-12+12=0$، فإن : $O\in(S)$. ولدينا : $O\in(OCD)$.

وبما أن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S)، فإن O هي نقطة تماس الفلكة (S) والمستوى (OCD).

التمرين الثاني :

نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A و B و C التي ألحاقها

على التوالي هي : $a=2-2i$ و $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $c=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

1. لدينا : $a=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]=\boxed{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

و لدينا : $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\left[1,\pi-\frac{\pi}{6}\right]=\left[1,\frac{5\pi}{6}\right]=\boxed{e^{i\frac{5\pi}{6}}}$.

2. نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$.

أ- ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R. لدينا :

$z'=R(z)\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{5\pi}{6}}z\Leftrightarrow\boxed{z'=bz}$.

ب- لتكن C' ، صورة النقطة A بالدوران R، لحقها c' . لدينا :

$c'=ba=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(2-2i\right)=-\sqrt{3}+\sqrt{3}i+i+1=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i=c$.

إذن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R.

3. حسب السؤال (2.ب-) ، لدينا : $c=ba$. إذن :

$$\begin{aligned}\arg(c)&\equiv\arg(ab)&[2\pi]\\&\equiv\arg(a)+\arg(b)&[2\pi]\end{aligned}$$

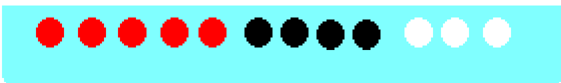
وحسب السؤال 1. ، نستنتج أن :

$$\begin{aligned}\arg(c)&\equiv\arg(a)+\arg(b)&[2\pi]\\&\equiv-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}&[2\pi]\\&\equiv\frac{7\pi}{12}&[2\pi]\end{aligned}$$

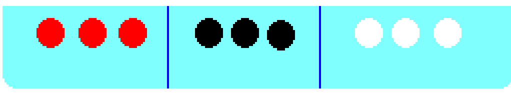
التمرين الثالث :

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 5 كرات حمراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .

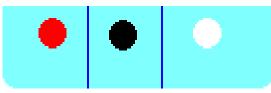
نسحب عشوائيا وتآنيا ثلاث كرات من الصندوق . وهذا يدل على السحب الآني (التأليفات) في حالة فرضية تساوي الاحتمال.



1. نعتبر الحدثين التاليين : A: « الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون »



و B: « الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى »



احتمال الحدث A هو : $p(A)=\dfrac{C_5^3+C_4^3+C_3^3}{C_{12}^3}=\dfrac{10+4+1}{220}=\dfrac{15}{220}=\boxed{\dfrac{3}{44}}$.

احتمال الحدث B هو : $p(B)=\dfrac{C_5^1C_4^1C_3^1}{C_{12}^3}=\dfrac{60}{220}=\boxed{\dfrac{3}{11}}$.

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث كرات بعدد الألوان التي تحملها.

أ- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 1 و 2 و 3 . ولدينا : $X(\Omega)=\{1,2,3\}$.

ب- لدينا : $p(X=1)=p(A)=\dfrac{3}{44}$ و $p(X=3)=p(B)=\dfrac{3}{11}$

و : $p(X=2)=1-\left(p(X=1)+p(X=3)\right)=1-\left(\dfrac{3}{44}+\dfrac{3}{11}\right)=1-\dfrac{15}{44}=\dfrac{29}{44}$

أو : $p(X=2)=\dfrac{C_3^2C_9^1+C_4^2C_8^1+C_5^2C_7^1}{C_{12}^3}=\dfrac{(3\times9)+(6\times8)+(10\times7)}{220}=\dfrac{145}{220}=\dfrac{29}{44}$

($RR\overline{R}$ أو $NN\overline{N}$ أو $BB\overline{B}$)

قانون احتمال المتغير العشوائي X :

x_k	1	2	3
$p_k=p(X=x_k)$	$\dfrac{3}{44}$	$\dfrac{29}{44}$	$\dfrac{3}{11}$

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{3}x_k p_k=\left(1\times\frac{3}{44}\right)+\left(2\times\frac{29}{44}\right)+\left(3\times\frac{3}{11}\right)=\frac{97}{44}\approx 2,2$$

التمرين الرابع :

نضع : $I=\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}\,dx$ و $J=\displaystyle\int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)\,dx$.

1. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}-\{-3\}$. لدينا : $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{x+3-3}{x+3}=1-\dfrac{3}{x+3}$.

ب- حساب التكامل I :

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx=\int_{-2}^{-1}1-\frac{3}{x+3}dx=\left[x-3\ln|x+3|\right]_{-2}^{-1}=(-1-3\ln2)-(-2-3\ln1)=\boxed{1-3\ln2}$$

2. حساب التكامل J :

$$\begin{aligned}J &= \int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)\,dx=\int_{-2}^{-1}x'\ln(2x+6)\,dx\\ &= \left[x\ln(2x+6)\right]_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}x\left(\ln(2x+6)\right)'dx\\ &= -\ln4+2\ln2-\int_{-2}^{-1}\frac{2}{2x+6}\,dx\\ &= -\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x+3}\,dx\\ J &= -I = -1+3\ln2\end{aligned}$$

التمرين الخامـــس :

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$ ، و ليكن $\mathscr{C}$

المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I. 1. ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا :

✓ $e^{2x}-2\sqrt{e^x}+2=e^{2x}-2\sqrt{e^x}+1+1=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$.

✓ حيز تعريف الدالة f : بما أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ e^{2x}-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\ >\ 0$ ، فإن :

$\mathscr{D}_f\ =\ \left\{x\in\mathbb{R}\ /\ e^x-2\sqrt{e^x}+2\ >\ 0\right\}\ =\ \mathbb{R}$.

✓ لكل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا : $e^x-2\sqrt{e^x}+2>0\Rightarrow\dfrac{e^x-2\sqrt{e^x}+2}{e^x}>0\Rightarrow 1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}>0$. إذن :

$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ 1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}>0$.

2. لدينا :

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)=+\infty$ ، لأن :

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1=+\infty$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$.

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2\ln\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)=2\ln 2=\boxed{\ln 4}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x=0$ ، ومنه نستنتج أن

المنحنى $\mathscr{C}$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $-\infty$ معادلته : $y=\ln 4$.

3. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا :

$$f'(x)=2\ln\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)'=2\frac{\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)'}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}=2\frac{2\left(\sqrt{e^x}-1\right)'\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}=2\frac{\cancel{2}\dfrac{e^x}{\cancel{2}\sqrt{e^x}}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$$

$$f'(x)=\boxed{\frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}}$$

ولدينا : $f'(0)=\dfrac{2\sqrt{e^0}\left(\sqrt{e^0}-1\right)}{\left(\sqrt{e^0}-1\right)^2+1}=\boxed{0}$.

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا : $\sqrt{e^x}-1=\dfrac{e^x-1}{\sqrt{e^x}+1}$. إذن إشارة $\sqrt{e^x}-1$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة e^x-1. ولدينا :

$x\geq 0\Rightarrow e^x\geq 1\Rightarrow e^x-1\geq 0$ و $x\leq 0\Rightarrow e^x\leq 1\Rightarrow e^x-1\leq 0$. ومنه نستنتج أن :

$\forall x\in[0,+\infty[\ :\ \sqrt{e^x}-1\geq 0$ و $\forall x\in]-\infty,0]\ :\ \sqrt{e^x}-1\leq 0$.

بما أن $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$: $\forall x\in\mathbb{R}$ ، فإن إشارة $f'(x)$ هي على إشارة $\sqrt{e^x}-1$.

وعليه فإن : $\forall x\in[0,+\infty[\ :\ f'(x)\geq 0$ و $\forall x\in]-\infty,0]\ :\ f'(x)\leq 0$.

إذن : f تزايدية على المجال $[0,+\infty[$ وتناقصية على المجال $]-\infty,0]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln 4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا :

$$f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)=2\ln\left(e^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)\right)=2\ln\left(e^x\right)+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$$

$$f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$$

ب- بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)=\boxed{0}$ ، فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى $\mathscr{C}$ بجوار $+\infty$.

5. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا : $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)=e^x-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2=e^x-3\sqrt{e^x}+2$.

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا : $\sqrt{e^x}-2=\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x}+2}$. إذن إشارة $\sqrt{e^x}-2$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة e^x-4 .

ولدينا : $x=\ln 4 \Leftrightarrow e^x=4 \Leftrightarrow e^x-4=0$. ومنه فإن :

x	$-\infty$		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-2$		$-$	0	$+$	

ونعلم إشارة $\sqrt{e^x}-1$ على $\mathbb{R}$ حسب السؤال (3. ب-) . إذن :

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{e^x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$		$+$		$-$		$+$	

جـ- حسب السؤال أعلاه ، لكل x من المجال $\left[0,\ln 4\right]$ ، لدينا :

$$\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)\leq 0 \Rightarrow e^x-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2\leq 0 \Rightarrow e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}$$

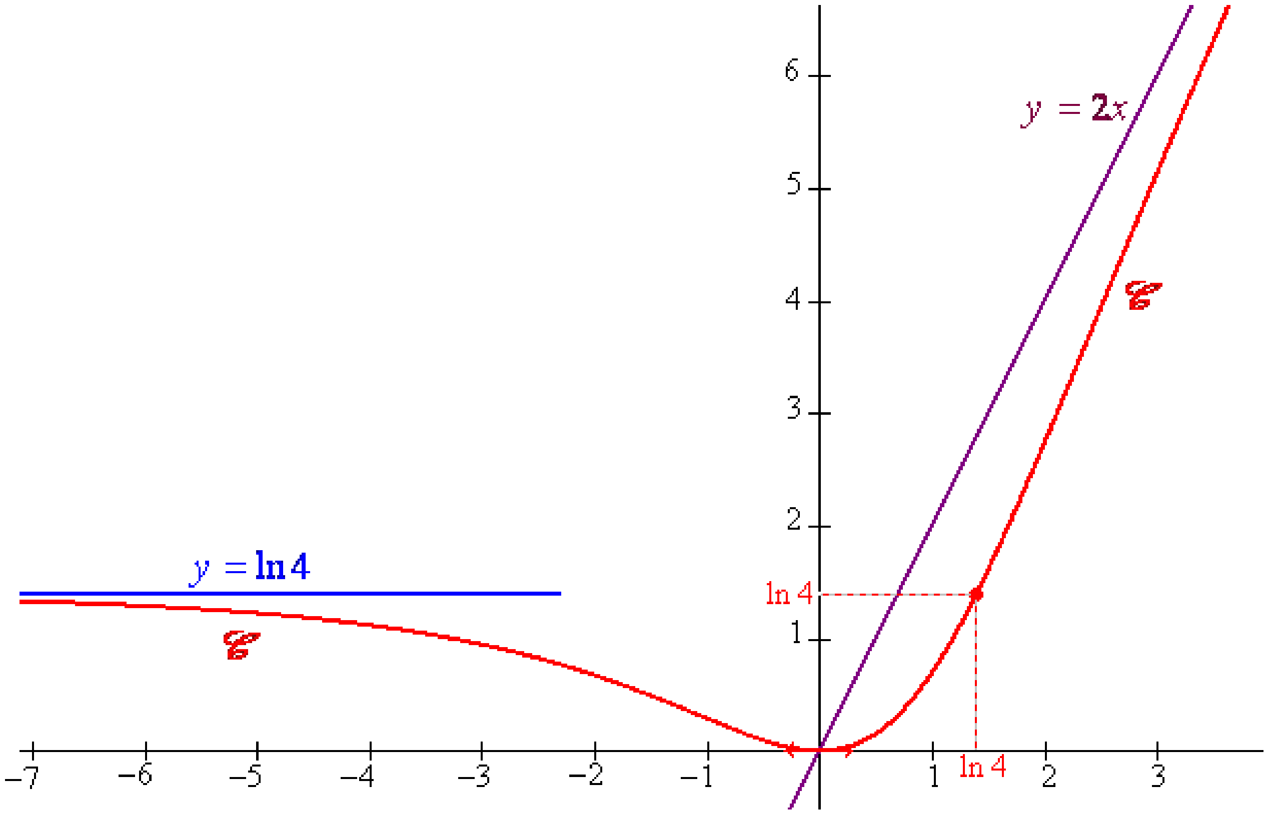
د- حسب السؤال أعلاه ، لكل x من المجال $\left[0,\ln 4\right]$ ، لدينا :

$$e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}\Rightarrow \ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\leq\ln\left(\sqrt{e^x}\right)\Rightarrow\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\leq\frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow 2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\leq x \;\Rightarrow f\left(x\right)\leq x$$

إذن : $\forall x\in\left[0,\ln 4\right]\;:\;f\left(x\right)\leq x$.

6. إنشاء المنحنى $\mathscr{C}$:



II. نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f\left(u_n\right) \quad ; \quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1. لدينا :

✓ من أجل $n=0$ ، $u_0=1$. إذن : $0\leq u_0\leq\ln 4$.

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$. نعترض أن : $0\leq u_n\leq\ln 4$ ، ونبين أن : $0\leq u_{n+1}\leq\ln 4$.

نعلم أن f تزايدية على المجال $\left[0,\ln 4\right]$. إذن :

$$0\leq u_n\leq\ln 4 \;\Rightarrow\; f\left(0\right)\leq f\left(u_n\right)\leq f\left(\ln 4\right) \;\Rightarrow\; 0\leq u_{n+1}\leq\ln 4 .$$

✓ وبالتالي فإن : $\forall n\in\mathbb{N}\;:\;0\;\leq\;u_n\;\leq\;\ln 4$.

2. نعلم أن : $f(x)\leq x$: $\forall x\in[0,\ln 4]$ ، وأن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ 0\ \leq\ u_n\ \leq\ \ln 4$.

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ f(u_n)\ \leq\ u_n$. أي : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ u_{n+1}\ \leq\ u_n$.

وبالتالي فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

3. لدينا : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0 . إذن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.

وبما أن :

- f متصلة على المجال $[0,\ln 4]$.
- f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0,\ln 4]$.

إذن : $f([0,\ln 4])=[f(0),f(\ln 4)]=[0,\ln 4]$.

- $u_0\ =\ 1\ \in\ [0,\ln 4]$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها $l\in\mathbb{R}$.

فإن النهاية l تحقق الشرطان التاليان : $f(l)=l$ و $l\in[0,\ln 4]$.

ولدينا :

$$\begin{aligned}
f(l)=l &\Leftrightarrow 2\ln\left(e^l-2\sqrt{e^l}+2\right)=l\\
&\Leftrightarrow \ln\left(e^l-2\sqrt{e^l}+2\right)=\frac{l}{2}\\
&\Leftrightarrow e^l-2\sqrt{e^l}+2=\sqrt{e^l}\\
&\Leftrightarrow e^l-3\sqrt{e^l}+2=0\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{e^l}-1\right)\left(\sqrt{e^l}-2\right)=0\\
&\Leftrightarrow \sqrt{e^l}=1 \text{ أو } \sqrt{e^l}=2\\
&\Leftrightarrow e^l=1 \text{ أو } e^l=4\\
&\Leftrightarrow l=0 \text{ أو } l=\ln 4
\end{aligned}$$

وبما أن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ، فإن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ u_n\ \leq\ u_0=1$. إذن : $l\ \leq\ 1$. ومنه فإن : $l\ =\ 0$

خلاصة : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=0}$