

تصحيح الإمتحان الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2010

شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها

مادة: الرياضيات

التمرين الأول:

(1) لدينا $\vec{AB}(4,0,-3)$ و $\vec{AC}(8,1,-6)$ إذن :

$$\begin{aligned}\vec{AB} \wedge \vec{AC} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 3\vec{i} + 4\vec{k}\end{aligned}$$

تحديد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

$$\mathcal{M}(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$$

$$(ABC): 3x + 4z - 9 = 0 \text{ ومنه}$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1) + 4(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 4z - 9 = 0$$

(2) لدينا معادلة الفلكة S هي: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

$$\mathcal{M}(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + z^2 - 15 = 0$$

إذن

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$$

وبالتالي: الفلكة (S) مركزها $\Omega(3,1,0)$ وشعاعها $r = 5$.

(3) أ- المستقيم (\mathcal{A}) موجه بالمتجهة المنظمة على المستوى (ABC) أي بـ $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ ويمر من $\Omega(3,1,0)$

$$\text{إذن النظمة: } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} \text{ تمثيل بارامترى للمستقيم } (\mathcal{A}).$$

ب- لنحسب مسافة $\Omega(3,1,0)$ عن المستقيم (\mathcal{A}) . بما أن $\Omega \in (\mathcal{A})$ فإن $d(\Omega; (\mathcal{A})) = 0 < r$ ومنه

(\mathcal{A}) يقطع الفلكة (S) في نقطتين متماثلتين بالنسبة للنقطة Ω .

$$\mathcal{M}(x, y, z) \in (S) \cap (\mathcal{A}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \\ x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 & (1) \\ x-3 = 3t \\ y-1 = 0 \\ z = 4t \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 9t^2 + 16t^2 = 25$$

لدينا

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = 1 \text{ أو } t = -1$$

وبالتالي $(S) \cap (A) = \{E(6,1,4); F(0,1,-4)\}$

التمرين الثاني:

(1) لنحل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 6z + 10 = 0$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة $z^2 - 6z + 10 = 0$.

لدينا:

$$z^2 - 6z + 10 = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-3)^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow z-3 = i \text{ أو } z-3 = -i$$

$$\Leftrightarrow z = 3+i \text{ أو } z = 3-i$$

وبالتالي $S = \{3+i; 3-i\}$

(2) أ- التمثيل العقدي للدوران \mathcal{R} الذي مركزه \mathcal{A} وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هو:

لتكن $\mathcal{M}'(z')$ صورة $\mathcal{M}(z)$ بالدوران \mathcal{R} إذن:

$$z' - a = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}(z - a) \Leftrightarrow z' - (3-i) = i(z - (3-i))$$

$$\Leftrightarrow z' = iz - 3i - 1 + 3 - i$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 2 - 4i$$

ب- لتكن c' لحو النقطة C' صورة C بالدوران \mathcal{R} إذن:

$$c' = ic + 2 - 4i$$

$$= i(7-3i) + 2 - 4i$$

$$= 5 + 3i$$

ج-

$$\frac{c' - b}{c - b} = \frac{5 + 3i - 3 - i}{7 - 3i - 3 - i} = \frac{2 + 2i}{4 - 4i}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1+i}{1-i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(1+i)^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2i}{2} \right) = \frac{1}{2}i$$

ومنه:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Arg}\left(\frac{c'-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\frac{c'-b}{c-b}\right| = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\frac{c'-b}{c-b}\right| = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ |c-b| = 2|c'-b| \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ BC = 2 \cdot BC' \end{array} \right\}$$

وبالتالي : المثلث BCC' قائم الزاوية في B وأن $BC = 2BC'$.

التمرين الثالث:

الصندوق يحتوي على 10 كرات ، نسحب تانيا 4 كرات من الصندوق .
كل عنصر من كون الإمكانيات Ω هو تأليفة لـ 4 كرات من بين 10 كرات التي يحتوي عليها الصندوق .
وبالتالي : $\text{card}\Omega = C_{10}^4 = 210$.

(1) الحدث \mathcal{A} : "الحصول على كرة حمراء واحدة فقط"

الحدث \mathcal{A} محقق إذا تم اختيار كرة واحدة حمراء من بين 3 كرات حمراء و 3 كرات من بين 7 كرات غير الحمراء الموجودة في الصندوق

إذن : $\text{card}\mathcal{A} = C_3^1 \times C_7^3 = 3 \times 35 = 105$ وبالتالي $p(\mathcal{A}) = \frac{\text{card}\mathcal{A}}{\text{card}\Omega} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$

الحدث \mathcal{B} : "الحصول على كرة بيضاء على الأقل"

لدينا الحدث $\overline{\mathcal{B}}$: "عدم الحصول على كرة بيضاء"

الحدث $\overline{\mathcal{B}}$ محقق إذا تم اختيار 4 كرات من بين 5 كرات غير البيضاء الموجودة في الصندوق .

إذن $\text{card}\overline{\mathcal{B}} = C_5^4 = 5$ وبالتالي $p(\overline{\mathcal{B}}) = \frac{\text{card}\overline{\mathcal{B}}}{\text{card}\Omega} = \frac{C_5^4}{C_{10}^4} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$

وبالتالي : $p(\mathcal{B}) = 1 - p(\overline{\mathcal{B}}) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$

(2) أ- الصندوق يحتوي على 3 كرات حمراء ومنه كل سحبة لـ 4 كرات من الصندوق تحتوي على :

ثلاث كرات حمراء أو كرتين حمراوتين أو كرة واحدة حمراء أو لا تحتوي على أية كرة حمراء.

ومنه مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي: 3 أو 2 أو 1 أو 0 . وبالتالي : $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$.

ب- حساب $p(X=2)$

الحدث $(X=2)$ محقق ، إذا تم اختيار كرتين حمراوتين من بين الكرات الثلاث الحمراء

و كرتين من بين 7 كرات غير الحمراء الموجودة في الصندوق . ومنه $\text{card}(X=2) = C_3^2 \times C_7^2 = 3 \times 21 = 63$

وبالتالي : $p(X=2) = \frac{\text{card}(X=2)}{\text{card}\Omega} = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}$

حساب $p(X=0)$

الحدث $(X=0)$ محقق ، إذا تم اختيار 4 كرات من بين 7 كرات غير الحمراء الموجودة في الصندوق.

$$. p(X=0) = \frac{\text{card}(X=0)}{\text{card } \Omega} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6} \text{ وبالتالي: } \text{card}(X=0) = C_7^4 = 35$$

$$. p(X=1) = p(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \text{ لدينا ج-}$$

الحدث $(X=3)$ محقق ، إذا تم اختيار الكرات الحمراء الثلاث وكرة من بين 7 كرات غير الحمراء الموجودة في الصندوق.

$$\text{card}(X=3) = C_3^3 \times C_7^1 = 7 \text{ إذن}$$

$$. p(X=3) = \frac{\text{card}(X=3)}{\text{card } \Omega} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30} \text{ وبالتالي:}$$

قانون احتمال المتغير العشوائي X .

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

التمرين الرابع:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(1) لنبين بالترجع أن : $u_n - 1 > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

لدينا $u_0 = 2$ إذن $u_0 - 1 > 0$ وبالتالي المتفاوتة $u_n - 1 > 0$ صحيحة من أجل $n = 0$.

ليكن n من \mathbb{N} نفترض أن $u_n - 1 > 0$ ونبين أن $u_{n+1} - 1 > 0$.

$$. u_{n+1} - 1 > 0 \text{ فإن } (\text{إفترض التراجع}) \text{ بما أن } u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{2u_n}$$

ومنه $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n - 1 > 0$.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

أ- لنبين أن (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

ليكن n من \mathbb{N} .

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2 \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1} = \frac{\frac{u_n - 1}{2u_n}}{\frac{4u_n - 2}{2u_n}} = \frac{u_n - 1}{4u_n - 2} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n - 1}{2u_n - 1} \right) = \frac{1}{2} v_n \text{ لدينا}$$

إذن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{2u_0 - 1} = \frac{1}{3}$.

نعلم أنه : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = v_0 \times q^n$ إذن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^n$.

ب- ليكن n من \mathbb{N} لدينا

$$v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} \Leftrightarrow v_n(2u_n - 1) = u_n - 1 \Leftrightarrow 2u_nv_n - v_n = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n(2v_n - 1) = v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1} \quad \text{إذن}$$

لدينا $0 < \frac{1}{2} < 1$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n - 1}{2v_n - 1} = 1$

(3) بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ و الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة في $x_0 = 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \ln(1) = 0$

ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

التمرين الخامس:

(I)

(1) لدينا g دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

ليكن x من \mathbb{R} لدينا $g'(x) = (1 + 4xe^{2x})' = 4(e^{2x} + 2xe^{2x}) = 4(2x + 1)e^{2x}$

ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x}$

(2) لدينا إشارة $g'(x)$ على \mathbb{R} هي إشارة $2x + 1$ ومنه :

على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ لدينا $g'(x) \geq 0$ ومنه g تزايدية على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

على المجال $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ لدينا $g'(x) \leq 0$ ومنه g تناقصية على $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

(3) أ- لدينا $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$

بما أن $e > 2$ فإن $\frac{2}{e} < 1$ ومنه $1 - \frac{2}{e} > 0$ وبالتالي $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

ب- من تغيرات الدالة g نستنتج أن الدالة g تقبل قيمة دنيا عند $-\frac{1}{2}$ ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) \geq g\left(-\frac{1}{2}\right)$

وبالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) > 0$

(II) $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$

(1) بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$

فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \cdot e^{2x} + x + 1 - e^{2x} = -\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \cdot e^{2x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

(2) لدينا f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولكل x من \mathbb{R} لدينا :

$$f'(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x}(2x-1) + 1$$

$$= 1 + 4xe^{2x} = g(x)$$

وبما أن $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) > 0$ فإن $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) > 0$ ومنه f تزايدية قطعاً على \mathbb{R} .

(3) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x} \cdot e^{2x} + \frac{x+1}{x} = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$$

نتيجة: (\mathcal{E}_f) يقبل فرع شلحمي في اتجاه محور الأرتاب . (الجزء الموجب)

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e \cdot (2x-1)e^{2x-1} = 0$$

لدينا لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x-1 = -\infty$

نتيجة: المستقيم $y = x + 1$ (A) مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{E}_f) بجوار $-\infty$.

ج- لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) - (x+1) = (2x-1)e^{2x}$

وبالتالي وضعية المنحنى (\mathcal{E}_f) و المستقيم (A) مرتبطة بإشارة $2x-1$.

- إذا كان $x = \frac{1}{2}$ فإن (A) يقطع (\mathcal{E}_f) في النقطة $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

- إذا كان $x > \frac{1}{2}$ فإن $2x-1 > 0$ ومنه (\mathcal{E}_f) يوجد فوق المستقيم (A).

- إذا كان $x < \frac{1}{2}$ فإن $2x-1 < 0$ ومنه (\mathcal{E}_f) يوجد تحت المستقيم (A).

(4)

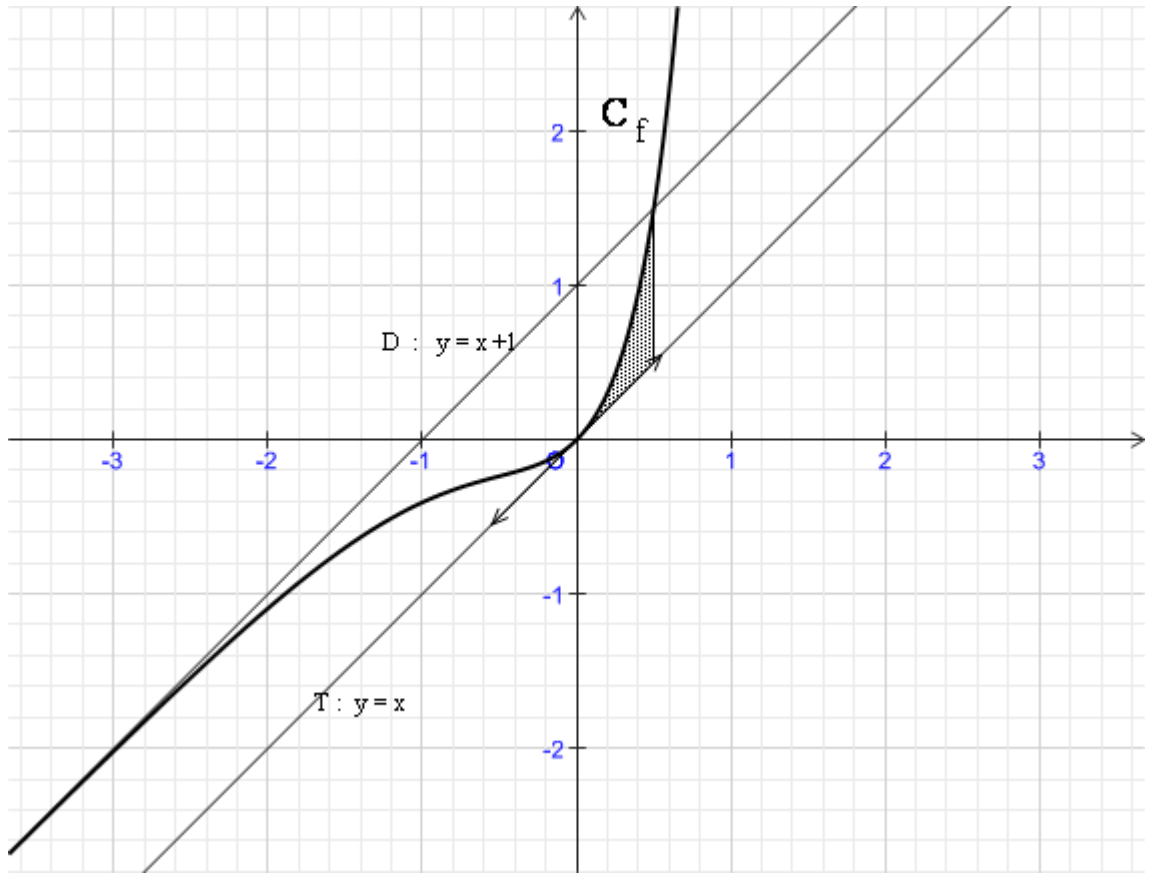
أ- لدينا $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ إذن معادلة المماس (T) للمنحنى (\mathcal{E}_f) عند النقطة O هي:

$$(T): y = x \quad \text{أي} \quad y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

ب- لدينا f' قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} . ولكل x من \mathbb{R} لدينا $f''(x) = 4[e^{2x} + 2xe^{2x}] = 4(2x+1)e^{2x}$

بما أن f'' تنعدم في $x_0 = -\frac{1}{2}$ مع تغيير إشارتها فإن النقطة من (\mathcal{E}_f) التي أفصولها $-\frac{1}{2}$ نقطة انعطاف.

(5) إنشاء المستقيمين (A) و (T) والمنحنى (\mathcal{E}_f)



$$(6) \text{ أ-لنين أن } \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$$

نضع : $u(x) = 2x - 1$ و $v'(x) = e^{2x}$ إذن $u'(x) = 2$ و $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ وبالتالي:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{e}{2}$$

ب- ليكن $x \geq 0$ نضع $h(x) = f(x) - x$ لدينا $h'(x) = f'(x) - 1 = g(x) - 1 = 4xe^{2x} \geq 0$

وبما أن $h(0) = 0$ فإن $h(x) \geq 0$ ($\forall x \geq 0$) وبالتالي $|f(x) - x| = f(x) - x$ ($\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$).

إذن مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T) المماس للمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتهما

$x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ هي:

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 1 + (2x-1)e^{2x} dx \right) \times 4cm^2 = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx \right) \times 4cm^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{e}{2} \right) \times 4cm^2$$

$$= (6 - 2e)cm^2$$