التمرين الأول :

1)أ- بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

و منه فإن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & -1 & 0\\ \vec{j} & 0 & 2\\ \vec{k} & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$

يعني : $=(0+2)\vec{i}-(1+0)\vec{j}+(-2+0)\vec{k}$

إذن : $=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

و بما أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ إذن النقط A و B و C غير مستقيمية أي أنـــــــــها تكون مسوى (ABC)

ب- بين أن $2x-y-2z+5=0$ هي المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC)

لدينا $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,-1,-2)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

و لدينا المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على الشكل : $ax+by+cz+d=0$

و منه فإن : $(ABC):\ 2x-y-2z+d=0$

لنحدد العدد d (نختار إحدى النقط A أو B أو C)

لدينا $C(0,5,0)$ يعني $2\times0-5-2\times0+d=0$ يعني $-5+d=0$ و منه $d=5$

و بالتالي : $(ABC):\ 2x-y-2z+5=0$

2)أ- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2,0,0)$ و شعاعها هو 3

لديـنا : $x^2+y^2+z^2-4x+0y+0z-5=0$

يعني : $\begin{cases} a=\dfrac{-4}{-2}=2\\ b=\dfrac{0}{-2}=0\\ c=\dfrac{0}{-2}=0\\ d=-5\end{cases}$ و منه فإن المركز هو $\Omega(2,0,0)$

و لدينا $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4+0+0+5}=\sqrt{9}=3$

ب- بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

لدينا : $\Omega(2,0,0)$ و $(ABC):\ 2x-y-2z+5=0$

إذن : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2x_\Omega-y_\Omega-2z_\Omega+5|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{|4+5|}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=\sqrt{9}=3=r$

و منه المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

ج- حدد مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S)

ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة $\Omega(2,0,0)$ و العمودي على المستوى (ABC)

إذن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,-1,-2)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

و بالتالي فإن التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) هو $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=-2t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$

و لدينا عند التعويض في معادلة المستوى $2(2+2t)+t+4t+5=0$

يعني $4+4t+t+4t+5=0$ يعني $9+9t=0$ يعني $9t=-9$ و منه $t=-1$

إذن بعد التعويض في التمثيل البارامتري نجد أن $H(0,1,2)$

التمرين الثاني :

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة : $z^2-z\sqrt{2}+2=0$

لدينا : $z^2-z\sqrt{2}+2=0$ و منه $\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times1=2-8=-6$

و بمأن $\Delta\prec0$ فإن للمعادلة حلين هما

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$$

أو

$$z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{2}$$

2)أ- بين أن معيار العدد u هو $\sqrt{2}$ و أن $Arg(u)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

لدينا : $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ و منه $|u|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{6}{4}}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}$

يعني : $u=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{3}\right]$

إذن : $\begin{cases} |u|=\sqrt{2} \\ Arg(u)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

ب- باستعمال كتابة العدد u على الشكل المثلثي بين أن u^6 عدد حقيقي

لديـنا : $u=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

تذكير : صيغة موفـر إذا كان $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ فإن $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

يعني أن : $u^6=\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^6=\sqrt{2}^6\left(\cos\left(\frac{6\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)\right)=8(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi))$

و منه : $u^6=8(1+i0)=8$ و بالتالي العدد u^6 عدد حقيقي

3)أ- عبر عن Z' بدلالة Z

لدينا حسب التمثيل العقدي للدوران $z'-w=e^{i\theta}(z-w)$

و منه $z'-o=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-o) \Leftrightarrow z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

ب- تحقق أن B هي صورة A بالدوران R و استنتج أن المثلث OAB متساوي أضلاع

لديـــنا : $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

يعني : $b=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a \Leftrightarrow b=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(4-i4\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow b=2-i2\sqrt{3}+i2\sqrt{3}+6 \Leftrightarrow b=8$

و بالتالي فإن B صورة A بالدوران R

بما أن $OA=OB$ و $\overline{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ حسب تعريف الدوران فإن المثلث OAB متساوي الأضلاع

التمرين الثالث :

1) بين بالترجع أن $u_n \prec 14$ لكل n من $\mathbb{N}$

أساس الترجع :

من أجل $n=0$ يعني $u_0=13$ و منه $u_0 \prec 14$ عبارة صحيحة

فرضيـــة الترجع

(ليكن n من $\mathbb{N}$)

- نفترض أن $u_n \prec 14$

- لنبين أن $u_{n+1} \prec 14$

لدينا $u_n \prec 14 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n \prec 7 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n+7 \prec 14 \Leftrightarrow u_{n+1} \prec 14$

نتيجـــة

لكل n مــن $\mathbb{N}$ فإن $u_n \prec 14$

2)أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم أكتب v_n بدلالة n

لدينا : $v_{n+1}=14-u_{n+1}=14-\left(\frac{1}{2}u_n+7\right)=14-\frac{1}{2}u_n-7=7-\frac{1}{2}u_n=\frac{1}{2}(14-u_n)=\frac{1}{2}v_n$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول هو $v_0=14-u_0=14-13=1$

لدينا حسب علاقة الحد العام لمتتالية هندسية $v_n=v_p.(q)^{n-p} \Leftrightarrow v_n=v_0.\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ب-استنتج أن $u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n)

لدينا : $v_n=14-u_n \Leftrightarrow u_n=14-v_n \Leftrightarrow u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=\lim\limits_{x\to+\infty} 14-\left(\frac{1}{2}\right)^n=14$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0 \Leftarrow -1 \prec \frac{1}{2} \prec 1$

ج- حدد أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n \succ 133{,}99$

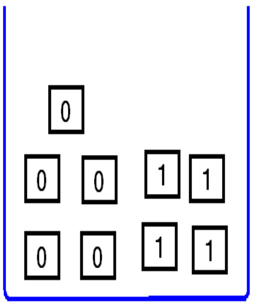
$$u_n \succ 13{,}99 \Leftrightarrow 14-\left(\frac{1}{2}\right)^n \succ 13{,}99 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n \succ 13{,}99-14 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n \succ -0{,}01 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \prec 0{,}01$$

لدينا
$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \prec \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{2}\right) \prec \ln(0{,}01) \Leftrightarrow -n\ln(2) \prec \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \succ \frac{\ln(0{,}01)}{-\ln(2)}$$

$$\Leftrightarrow n \succ 6{,}64 \Leftrightarrow n \succ 7$$

إذن أصغر قيمة يتخذها العدد الصحيح الطبيعي n هي 7

التمرين الرابع :



-نسحب من الكيس و في ان واحد بيدقتين

1- نحسب كون الإمكانيات Ω يعني $Card(\Omega)=C_9^2=36$

الحدث A "مجموع العددين اللذين تحملاهما البيدقتين يساوي 1 "

لدينا : $p(A)=\dfrac{C_4^1.C_5^1}{36}=\dfrac{4\times 5}{36}=\dfrac{20}{36}=\dfrac{5}{9}$

الحدث B " إحتمال فوز سعيد إذا سحب بيدقتين تحمل كل منهما العدد1 "

لديـــنا : $p(B)=\dfrac{C_4^2}{36}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

الحدث C "احتمال فوز سعيد مرتين بالضبط "

هناك عدة طرق يمكنك إستعمالها للإجابة على هذا السؤال و من بين هاته الطرق قانون الحدانية

إذن : $p(C)=C_3^2.\left(\dfrac{1}{6}\right)^2.\left(1-\dfrac{1}{6}\right)^{3-2}=\dfrac{5}{72}$

مسألــــــــــــــة :

<u>الجزء الأول :</u>

1) بين أن $g'(x)=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ و استنتج أن الدالة g تزايدية على $]0,+\infty[$

لدينا : $g'(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}+\ln(x)\right)'=\dfrac{(x^2)'}{x^4}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x}{x^4}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x}$

و منه $\forall x\in]0,+\infty[\ ; \ \dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x}\succ 0 \Leftrightarrow g'(x)\succ 0$ أي أن الدالة g تزايدية على المجال $]0,+\infty[$

2) تحقق أن $g(1)=0$ ثم استنتج أن $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0,1]$ و أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1,+\infty[$

لدينا : $g(1)=1-\dfrac{1}{1^2}+\ln(1)=1-1+0=0$ و منه

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$

إذن حسب جدول التغيرات لدينا : $\forall x\in]0,1]\ ;\ g(x)\leq 0$ و $\forall x\in[1,+\infty[\ ;\ g(x)\geq 0$

<u>الجزء الثاني :</u>

1) بين أن $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ و أول هندسياً النتيجة

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\ln(x)\right)^2+\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\ln(x)\right)=+\infty$

و منه المستقيم ذو المعادلـــــــــــــــة $x=0$ مقارب للمنحنى (ς_f)

2) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln(x)\right)^2+\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln(x)\right)=+\infty$

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\ln(x)\right)^2}{x}=0$ (يمكنك وضع $t=\sqrt{x}$) ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

نضع : $t=\sqrt{x}\Leftrightarrow t^2=x$ و $x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$

و منه :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\ln(x)\right)^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+\ln(t^2)\right)^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+2\ln(t)\right)^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1+2\ln(t)}{t}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+\frac{2\ln(t)}{t}\right)^2=0$$

لأن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(t)}{t}=0$

و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\ln(x)\right)^2+\dfrac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\ln(x)\right)^2}{x}+\dfrac{1}{x^3}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\ln(x)\right)^2}{x}$

ج- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (ς_f) بجوار $+\infty$

إذن المنحنى (ς_f) يقبل فرع شلجمي إتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

3) أ- بين أن لكل x من $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن f تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$

لدينا :

$$f'(x)=\left(\left(1+\ln(x)\right)^2+\frac{1}{x^2}\right)'=2\left(1+\ln(x)\right)'\left(1+\ln(x)\right)-\frac{2x}{x^4}=2.\frac{1}{x}\left(1+\ln(x)\right)-\frac{2}{x^3}=\frac{2}{x}\left(1+\ln(x)-\frac{1}{x^2}\right)$$

إذن $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$

و بما أن $g(x)\le 0$; $\forall x\in]0,1]$ فإن $f'(x)\le 0$ أي أن الدالــة f تناقصية على المجال $]0,1]$

و بما أن $g(x)\ge 0$; $\forall x\in [1,+\infty[$ فإن $f'(x)\ge 0$ أي أن الدالــة f تزايدية على المجال $[1,+\infty[$

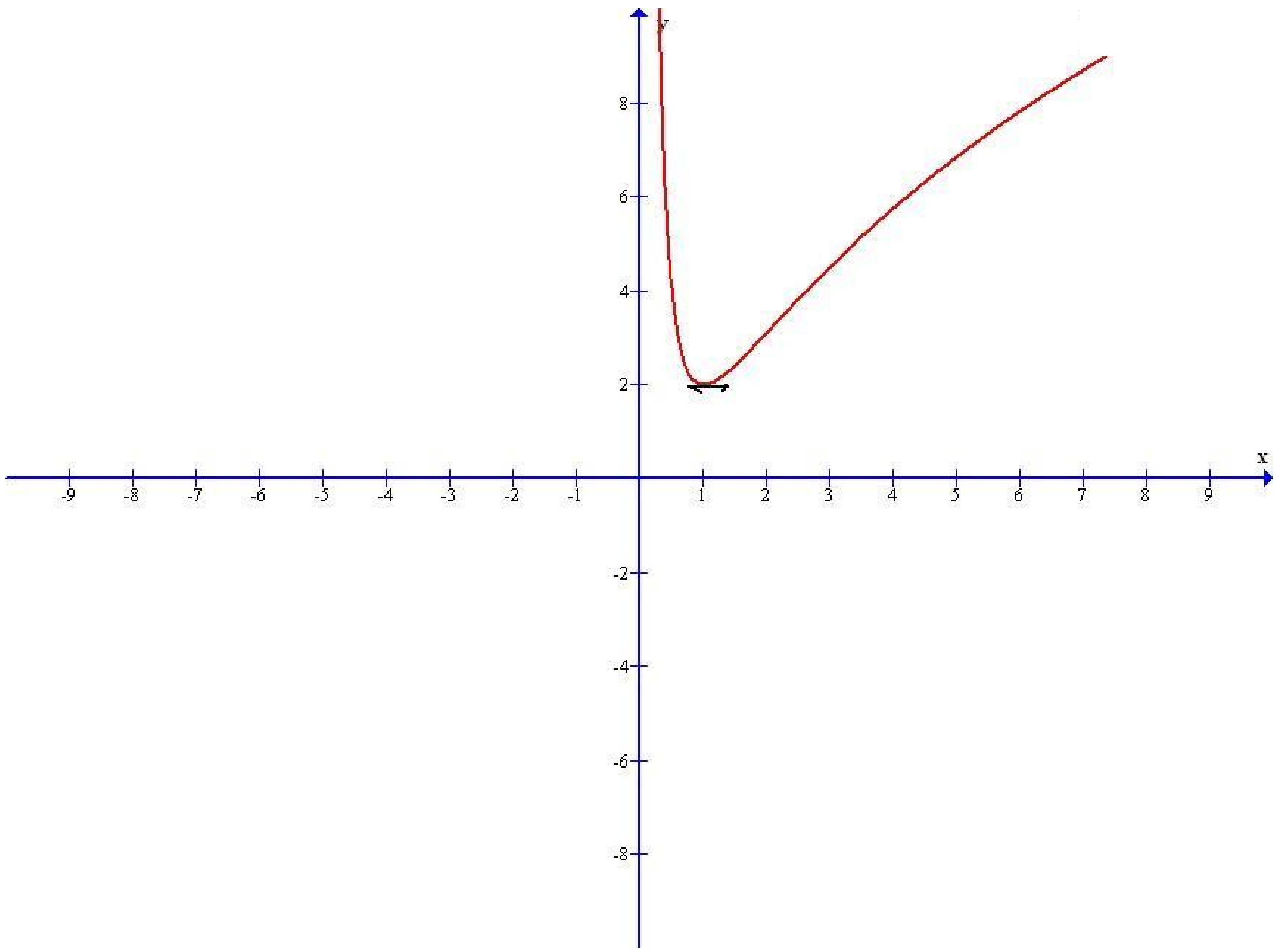
ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن $f(x)\ge 2$ لكل x من $]0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)=2$	$\nearrow$	$+\infty$

من خلال جدول التغيرات لدينا $f(1)=2$ قيمة دنوية على المجال $]0,+\infty[$

و منه $\forall x\in]0,+\infty[\; ; \; f(1)\le f(x) \Leftrightarrow 2\le f(x)$

4) أنشئ (ς_f) في معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (ς_f) نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب)



الجزء الثالث :

أ- بين أن $H: x \to x\ln(x)$ دالة أصلية للدالة $h: x \to \ln(x)+1$ على $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن $I=e$

لدينا : $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ H'(x)=\left(x\ln(x)\right)'=x'\ln(x)+x\ln'(x)=\ln(x)+\frac{x}{x}=\ln(x)+1=h(x)$

و منه الدالــــة $H: x \to x\ln(x)$ دالة أصلية للدالة $h: x \to \ln(x)+1$; $\forall x \in]0,+\infty[$

لدينا $I=\int_1^e (1+\ln(x))\,dx=\int_1^e 1\,dx+\int_1^e \ln(x)\,dx$

نحسب $\int_1^e \ln(x)\,dx$ يعني $\begin{cases} u(x)=\ln(x) \\ v'(x)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=x \end{cases}$ و منه $\int_1^e \ln(x)\,dx=[x\ln(x)]_1^e-\int_1^e 1\,dx$

إذن $I=\int_1^e (1+\ln(x))\,dx=\int_1^e 1\,dx+\int_1^e \ln(x)\,dx=\int_1^e 1\,dx+[x\ln(x)]_1^e-\int_1^e 1\,dx=[x\ln(x)]_1^e=H(e)-H(1)$

أي أن : $I=[x\ln(x)]_1^e=H(e)-H(1)=e\ln(e)-1\ln(1)=e$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $J=2e-1$

لنحسب التكامل $J=\int_1^e (1+\ln(x))^2\,dx$ بإستعمال المكاملة بالأجزاء

لدينا : $\begin{cases} u(x)=1+\ln(x) \\ v'(x)=1+\ln(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=x\ln(x) \end{cases}$

و منه :

$$J=\int_1^e (1+\ln(x))^2\,dx=\left[x\ln(x)(1+\ln(x))\right]_1^e-\int_1^e \ln(x)\,dx=\left[x\ln(x)(1+\ln(x))\right]_1^e-\left[x\ln(x)-x\right]_1^e$$
$$=\left[x\ln(x)(1+\ln(x))-x\ln(x)+x\right]_1^e=e\ln(e)(1+\ln(e))-e\ln(e)+e-\left[1\ln(1)(1+\ln(1))-1\ln(1)+1\right]$$
$$=2e-e+e-1=2e-1$$

ج- أحسب ب cm^2 مساحة الحيز المحصور بين (ς_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=1$ و $x=e$

نحسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (ς_f) و المستقيمين $x=1$ و $x=e$

لدينا :

$$\int_1^e f(x)\,dx.u.A=\int_1^e\left((1+\ln(x))^2+\frac{1}{x^2}\right)dx.u.A=\left[\int_1^e (1+\ln(x))^2\,dx+\int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx\right]u.A=\left(J+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e\right).cm^2$$

و منه $$=\left(2e-1-\frac{1}{e}+1\right).cm^2=\left(2e-\frac{1}{e}\right).cm^2$$