LH II - 2STE / 2STM	DM5	A rendre le 17/04/2008

Problème

Soient f la fonction définie sur IR par $f(x)=(2x+1)^2 e^{-2x}$

et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. ***(l'unité de mesure est 2cm.)***

1.a) Vérifier que $\forall x\in IR:\ f(x)=\left(\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{x}\right)^2$ ***(0,5 point)***

b) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ***. Interpréter ce résultat géométriquement (0,75 point)***

2. a) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ***(0,25 point)***

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ ***.Interpréter ce résultat géométriquement (0,75 point)***

3. a) Montrer que $\forall x\in IR: f'(x)=2(1-2x)(1+2x)e^{-2x}$ ***(0,5 point)***

b) Étudier sur IR ***le signe de*** $(1-2x)(1+2x)$ ***(0,5 point)***

c) Établir le tableau des variations de la fonction f (0,5 point)

4. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 (0,5 point)

5. Construire la courbe (C) (On prend $f\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}6$ ***) (0,75 point)***

6. a) Résoudre de l'équation différentielle $(E): y''+4y'+4y=0$ ***(0,75 point)***

b) Déterminer la solution H de l'équation (E) qui vérifiée $H(0)=-1$ *et* $H'(0)=1$ ***(0,5 point)***

c) Montrer que H est une primitive de la fonction h définie sur IR par $h(x)=(2x+1)e^{-2x}$ ***(0,5 point)***

7. a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ ***(0,75 point)***

b) En déduire l'aire de la partie du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les deux droites d'équations $x=0$ *et* $x=\frac{1}{2}$ ***(0,5 point)***

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé directe $(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

On considère les points A(-1 ; 2 ; 1) , B(1 ; -6 ; -1) , C (2 ; 2 ; 2) et I (2 ; -1 ; 1)

1. a) calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ ***(0,5 point)***

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). (0,5 point)

2. Soit P le plan d'équation : x - y + z - 4 = 0.

a) Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants selon une droite D. (0,5 point)

b) Vérifier que $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in IR)$ ***est une représentation paramétrique de la droite D (0,5 point)***

3. On considère la sphère S de centre Ω(3 ; 1 ; 3) et de rayon 3

a) Montrer que le point I appartient à la droite D (0,25 point)

b) Montrer que le point I appartient à la sphère S (0,25 point)

c) Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point J à déterminer. (0,5 point)

Exercice 2

1. Résoudre dans ℂ l'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$ ***(0,5 point)***

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$. ***On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives*** $z_A = 1 - i\sqrt{3}$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$.

a) Donner une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\text{®}}{2}$ ***(0,5 point)***

b) Vérifier que : r (A) = C ; r (C) = B et r (B) = D. (0,75 point)

c) En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon (0,75 point)

Exercice 3

Soit la suite (U_n) définie sur ℕ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^{\ 2} + 3}{U_n + 1} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2 \leq U_n \leq 3$
2) a) Montrer que (U_n) est une suite croissante.

   b) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.
3) a) Vérifier que $3 - U_{n+1} = \dfrac{U_n(3 - U_n)}{U_n + 1}$

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $3 - U_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}(3 - U_n)$

   c) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $3 - U_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ puis retrouver la limite de la suite (U_n).