EX1

On considère la suite numérique (u_n) **définie par :**

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

1) Vérifier que $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ **pour tout entier naturel** n **puis montrer par récurrence que** $u_n < 3$ **pour tout entier naturel** n

2)Soit (v_n) **la suite numérique définie par :** $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3 - u_n}$ **pour tout entier naturel** n

a) Montrer que (v_n) **est une suite géométrique de raison** $\dfrac{1}{2}$ **puis en déduire que** $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ **pour tout entier naturel** n

b) Montrer que $u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ **pour tout entier naturel** n **puis écrire** u_n **en fonction de** n

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

EX2

EX3

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 29 = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ **, on considère les points** Ω **,** A **et** B **d'affixes respectives** ω **,** a **et** b **telles que** $\omega = 2+5i$ **,** $a = 5+2i$ **et** $b = 5+8i$

a)Soit u **le nombre complexe tel que** $u = b - \omega$

Vérifier que $u = 3+3i$ **puis montrer que** $\arg u \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) Déterminer un argument du nombre complexe $\overline{u}$ **(** $\overline{u}$ **étant le conjugué de** u **)**

c) Vérifier que $a - \omega = \overline{u}$ **puis en déduire que** $\Omega A = \Omega B$ **et que** $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

d) On considère la rotation R **de centre** Ω **et d'angle** $\frac{\pi}{2}$

Déterminer l'image du point A **par la rotation** R

EX4

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0$, où z est un nombre complexe.

a. Déterminer la solution réelle de (E).

b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. On pose $a = 3$, $b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$.

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c. Soit M le point d'affixe z distinct de A et de B.

a. Calculer $\frac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC.

b. On pose $Z = \frac{z-3}{z-5+2i}$.

Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z.

En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel non nul.

3. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et I le point d'affixe $2 - i$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre I et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

b. Déterminer l'image (C') de (C) par r. Construire (C').

EX5

On considère la fonction numérique f définie sur $I\!R$ par : $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$

Soit $\left(C_f\right)$ **la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé** $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ **(unité:** $1cm$ **)**

I-1)a)Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b)Montrer que la droite (D) **d'équation** $y=2x-2$ **est asymptote à la courbe** $\left(C_f\right)$ **au voisinage de** $-\infty$

2)a)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ **puis interpréter géométriquement ce résultat.**

3)a)Montrer que $f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)^{2}$ **pour tout nombre réel** x

b) Donner le tableau de variations de la fonction f **sur** $I\!R$ **(Remarquer que** $f'(0)=0$ **)**

c) Montrer qu'il existe un réel unique α **de l'intervalle** $]1\,,\ln 4[$ **tel que** $f(\alpha)=0$

4)a)Montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ **est située au dessus de la droite** (D) **sur l'intervalle** $]\ln 4,+\infty[$ **et en dessous de la droite** (D) **sur l'intervalle** $]-\infty,\ln 4[$

b) Montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ **admet un point d'inflexion unique de coordonnées** $(0\,,-5)$

c)Construire la droite (D) **et la courbe** $\left(C_f\right)$ **dans le même repère** $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

(on prendra $\ln 4\approx 1{,}4$ **et** $\alpha\approx 1{,}3$ **)**

5)Soit h **la fonction numérique définie sur l'intervalle** $]\ln 4,+\infty[$ **par :** $h(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)$

a) Montrer que la fonction h **admet une fonction réciproque** h^{-1} **et que** h^{-1} **est définie sur** $I\!R$

b) Vérifier que $h(\ln 5)=\ln 5$ **puis déterminer** $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)$

PROBLEME

Partie A

Soit g la fonction définie par : $$g(x)=-2\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}.$$

1. a. Déterminer Dg, puis calculer les limites de g aux bornes de Dg

b. Calculer $g'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de g

2. a. Calculer $g(0)$. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions dont l'une que l'on désigne $\alpha\in]-0,72,-0,71[$.

b. Déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{ln(x+1)} & \text{si} \quad x > -1 \\ f(x) = (1+x)e^{-x-1} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. a. Montrer que $Df = \mathbb{R}$ et calculer les limites aux bornes de Df

b. Etudier la nature des branches infinies.

2. a. Etudier la continuité de f en -1 et en 0.

b. Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

3. a. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$ et $x \neq 0$ on a $f'(x) = \dfrac{-xg(x)}{\ln^2(x+1)}$ et calculer $f'(x)$ sur $]-\infty, -1[$.

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

4. Soit h la restriction de f à $[0, +\infty[$.

a. Montrer que h réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b. Donner le sens de variation de h^{-1}.

c. Construire Cf et Ch^{-1}.

Partie C

Soit m la fonction définie par $m(x) = \dfrac{ln(x+1)}{x^2} - \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. a. Déterminer les fonctions u et v telles que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$m(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

b. En déduire la fonction H définie sur $]0, +\infty[$ telle que $H'(x) = m(x)$