Les ensembles de nombres

1 Les nombres entiers

Définition

$0\,;1\,;2\,;3\,;$ ....50 ; 51 ; 52 ; .... sont des **nombres entiers naturels**

L'ensemble de ces nombres est appelé $\boxed{\mathbb{N}}$

Exemples

$7 \in \mathbb{N}$ mais $-7 \notin \mathbb{N}$ et $3,8 \notin \mathbb{N}$

Définition

.... -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ..... sont des **nombres entiers relatifs**

L'ensemble de ces nombres est appelé $\boxed{\mathbb{Z}}$

Exemples

$7 \in \mathbb{Z}\,;\ -7 \in \mathbb{Z}$ et $3,8 \notin \mathbb{Z}$

Remarque

$\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ $\qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

C'est à dire que tout entier naturel est un entier relatif

2 Les nombres rationnels

Définition

On appelle **nombre rationnel** tout nombre qui peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier relatif non nul.

L'écriture $\dfrac{a}{b}$ est appelée écriture fractionnaire .

L'ensemble de ces nombres est noté $\boxed{\mathbb{Q}}$

Exemples

$7 \in \mathbb{Q}\,;\ \dfrac{5}{2} \in \mathbb{Q}\,;\ \dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}\,;\ 3,8 \in \mathbb{Q}$

Remarques

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- Un nombre rationnel admet une infinité d'écriture fractionnaire.
  Par exemple $\dfrac{4}{3}$ peut s'écrire : $\dfrac{8}{6}\,;\ -\dfrac{20}{15}$ ....

3 Cas particuliers : les nombres décimaux

Définition

On appelle **nombre décimal** tout nombre qui peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où a et n sont des entiers relatifs

L'ensemble de ces nombres est noté $\boxed{\mathbb{D}}$

Remarques

- $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, les décimaux sont des rationnels particuliers.
- Comme on divise un nombre entier par une puissance de 10 l'écriture décimale d'un nombre décimale admet un nombre fini de chiffres après la virgule .
  (la division se *termine*)

Exemples

$\dfrac{1385}{100} \in \mathbb{D}\,;\ -\dfrac{4}{10000} \in \mathbb{D}\,;\ \dfrac{3}{4} = \dfrac{75}{100} \in \mathbb{D}$

Par contre : $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ car on ne peut pas obtenir une fraction égale à $\dfrac{1}{3}$ avec une puissance de 10 au dénominateur.

En fait : $\dfrac{1}{3} = 0,3333333.....$

L'écriture décimale admet un nombre infini de chiffres après la virgule

Définition

Tout nombre décimal positif s'écrit de manière unique sous la forme $a \times 10^p$ avec $1 \leq a < 10$ et p entier relatif
Cette écriture est appelée **écriture scientifique** de ce nombre.

Exemple

L'écriture scientifique de 2328423 est $2,328423 \times 10^6$
On dit que : 2×10^6 est **l'ordre de grandeur** de 2328423

4 Les autres nombres

Il existe des nombres qui n'appartiennent à aucun des ensembles que nous venons de définir.
On démontre par exemple que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ou $\pi \notin \mathbb{Q}$
ces nombres sont appelés $\boxed{\text{nombres irrationnels}}$
ils appartiennent (avec tous les nombres définis précédemment) à $\boxed{\text{l'ensemble des nombres réels}}$ qui est noté : $\boxed{\mathbb{R}}$

Définition

l'ensemble des nombres réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.
c'est à dire munie d'un repère (O,I) .
Cette droite, qui représente $\mathbb{R}$ est appelée $\boxed{\text{droite des réels ou droite numérique}}$

5. Ensemble vide

Un ensemble qui ne contient pas de nombre s'appelle l'**ensemble vide** et se note $\varnothing$.

6. Symbole d'exclusion

Le signe * exclu le nombre 0 d'un ensemble.
Par exemple, $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels privé de 0.

7. Inclusions

Tous les nombres de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ appartiennent à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.
On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$.
On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On a également les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Exercice 1

1) Effectuer : $A = \frac{11}{5} - \frac{3}{4}$ $\quad B = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{6}{7}$ $\quad C = \frac{5^{-1} \times (5^3)^3}{5 \times 5^2}$

$D = (1 - \sqrt{6})(1 + \sqrt{6})$ $\quad E = (\sqrt{3} - 1)^2$ $\quad F = (3 + 2\sqrt{2})^2$

$G = 7\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{27}$ $\quad H = \sqrt{18} - \sqrt{2} - 2\sqrt{20}$

2) Déterminer la nature de chacun des nombres précédents.