1.Diviseurs et multiples. Définition :

Le nombre a est divisible par b s'il existe un nombre n tel que : a = b x n.
On dit alors que a est multiple de b et de n.

Exemple:

10 = 2x5 donc 10 est divisible par 2 et par 5, et 10 est un multiple de 2 et 5 .

Critères de divisibilité.

Un nombre est divisible par 2 s'il est pair, c'est-à-dire lorsqu'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Un nombre est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.

Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.

Un nombre est divisible par 9 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.

Exemple:
- 675 est divisible par 9 car 6+7+5=18
- 18 est divisible par 9.
- 114 est divisible par 3 car 1+1+4 = 6 et 6 est divisible par 3.

2. Diviseurs communs. Définition :

Un diviseur commun de deux nombres a et b est un nombre qui divise à la fois a et b.

Exemple: 3 est un diviseur commun de 114 et 27 car 3 divise 114 et 3 divise 27

3.Plus Grand Diviseur Commun. Définition :

Le PGCD de deux nombres a et b est le plus grand des diviseurs communs de a et de b.

PGCD(a ;b)

Deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est 1, c'est-à-dire lorsqu'il n'ont comme diviseur commun que le nombre 1.

Exemple: 8 et 27 sont premiers entre eux car ils n'ont comme diviseur commun que 1, leur PGCD est 1.

Exemple : Calculer le PGCD de 60 et 48

I)1ère méthode : Listes de diviseurs

On cherche le Pgcd de 60 et 48.

Etape 1 : On donne la liste des diviseurs de 60 : 1 2 3 4 5 6 10 12 15 20 30 60

Etape 2 : On donne la liste des diviseurs de 48 : 1 2 3 4 6 8 12 16 24 48

Etape 3 : On en déduit que 12 est le PlusGrand Commun diviseur, donc Pgcd (60;48)=12

Cette méthode est souvent trop longue et fastidieuse, c'est pourquoi on va mettre en place une nouvelle méthode de recherche de Pgcd.

II) 2ème méthode: La décomposition en facteurs premiers (voir cours

Exercice : Calculer le PGCD de 675 et 375

4.Les fractions irréductible : Définition :

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Si on simplifie une fraction par le PGCD du numérateur et du dénominateur, alors on obtient une fraction irréductible.

Exemple: simplifier la fraction $\frac{675}{375}$

5. NOMBRES PREMIERS

a.) Définition

Définition : Un nombre entier naturel est dit premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
Remarque : On considère que 1 n'est pas un nombre premier.

Exemples : 3, 5, 13, 71 sot des nombres premiers.
14 n'est pas un nombre premier : il est divisible par 1, 2, 7 et 14

b.) Crible d'Ératosthène

Pour trouver les nombres premiers, on utilise le « crible d'Eratosthène :

~~0~~	~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49

c.) Méthode de recherche d'un nombre premier

Pour savoir si un nombre est premier ou non, on le divise successivement par les nombres premiers jusqu'à ce que le quotient obtenu soit inférieur au diviseur

Exemple : 157 est-il premier ?

- 157 n'est pas divisible par 2 et 157/2 = 75,5 ce qui est supérieur à 2
- 157 n'est pas divisible par 3 et 157/3 = 52,3.. ce qui est supérieur à 3
- 157 n'est pas divisible par 5 et 157/5 = 31,4 ce qui est supérieur à 5
- 157 n'est pas divisible par 7 et 157/7 = 22,4.. ce qui est supérieur à 7
- 157 n'est pas divisible par 11 et 157/11 = 14,3.. ce qui est supérieur à 11
- 157 n'est pas divisible par 13 et 157/13 = 12,0.. ce qui est inférieur à 13

Conclusion : 157 n'est pas un nombre premier

d.) Décomposition en facteurs premiers

Décomposer en produit de facteurs premiers signifie trouver tous les diviseurs premiers d'un nombre

On regarde d'abord combien le nombre est divisible par 2, puis par 3, 5, 7 …

Exemple : Décomposer 1050

1050	2
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

donc, $1050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$

6. PPCM-Plus Petit Multiple Commun

Le ppcm de deux nombres entiers naturels (non nuls) est leur plus petit multiple commun non nul.

On note ppcm(a, b) le ppcm des nombres a et b.

Nous allons calculer ppcm(132, 72) de trois manières différentes :

Méthode n° 1 :

Étudions les multiples des deux nombres.
Les multiples de 132 sont :
0 ; 132 ; 264 ; 396 ; 528 ; 660 ; 792 ; 924 ; ... (liste infinie)

Les multiples de 72 sont :
0 ; 72 ; 144 ; 216 ; 288 ; 360 ; 432 ; 504; 576 ; 648 ; 720 ; 792 ; ... (liste infinie)

Les multiples communs sont : 0 ; 792 ; ... (On trouverait ensuite : 1584; 2372 ; ...)
Le plus petit multiple commun non nul est 792.

Remarque: les multiples communs sont les multiples du ppcm.

Méthode n° 2 :

Utilisons les décompositions en produits de facteurs premiers.

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$
$132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11 = 2^2 \times 3^1 \times 11^1$

Prenons tous les facteurs qui figurent dans l'un au moins de ces produits ; s'ils ont des exposants, nous leur attribuons leur plus grand exposant ;

effectuons ensuite le produit :
$\text{ppcm}(72, 132) = 2^3 \times 3^2 \times 11^1 = 8 \times 9 \times 11 = 792$

Méthode n° 3 :

Utilisons la formule : pgcd(a, b) x ppcm(a, b) = a x b

Le produit de deux nombres entiers (non nuls) est toujours égal au produit de leur pgcd par leur ppcm.
On peut commencer par calculer le pgcd de 72 et 132.On trouve : pgcd(72, 132) = 12.
Donc:
ppcm(72, 132) = (72 * 132) / 12 = 792.