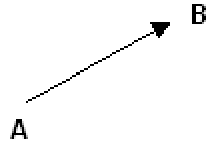
VECTEURS

1) Vecteur : définition et représentation

Définition :

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est parfaitement déterminé par trois composantes :
Une direction : celle de la droite (AB)
Un sens : de A vers B
Une **longueur**, appelée **norme** et notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$



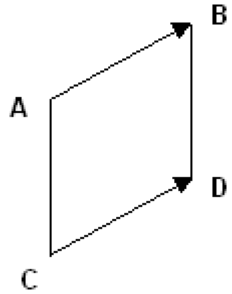
Propriétés :

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si seulement si ils ont même direction, même sens, et même norme.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **opposés** si seulement si ils ont même direction, des sens opposés, et même norme.

Propriété : **Egalité et parallélogramme**

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si seulement si AB**D**C est un parallélogramme



Propriété :

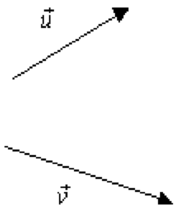
Tout vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues est de norme nul.

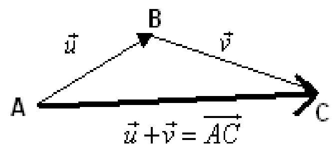
On l'appelle **VECTEUR NUL** et on le note $\vec{0}$

2) Addition et soustraction de vecteurs

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques, A,B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
Alors on définit le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ par $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AC}$





Propriété : **Relation de Chasles**

Quels que soient les points A,B et C, alors $\overrightarrow{A\underbrace{B}_{\text{meme}}} + \overrightarrow{\underbrace{B}_{\text{lettre}}C} = \overrightarrow{AC}$

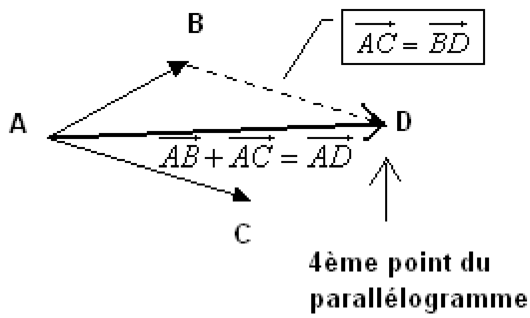
Propriété : **Inégalité triangulaire**

Quels que soient les points A,B et C, alors $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

De manière générale, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$

Propriété

Soit A,B et C trois points non alignés. Alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est la quatrième sommet du parallélogramme AB**D**C



Justification :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

Propriété de l'addition

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ $\qquad$ $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$ $\qquad$ $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

3) Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition

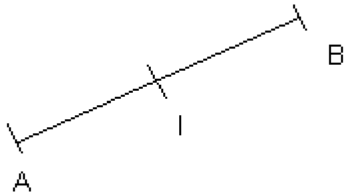
Soit $\vec{u}$ un vecteur et $k \in \mathbb{R}$. Alors le vecteur $\vec{v} = k \times \vec{u}$ résultant de la multiplication de $\vec{u}$ par *k*, est défini par :
Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{v} = \vec{0}$
$\vec{u}$ et $\vec{v} = k \times \vec{u}$ ont même direction
$\vec{u}$ et $\vec{v} = k \times \vec{u}$ sont de même sens si et seulement si $k > 0$ et de sens opposés si et seulement si $k < 0$
$\left\|\vec{v}\right\| = |k| \times \left\|\vec{u}\right\|$

Définition
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. S'il existe un réel non nul k tel que $\vec{v} = k \times \vec{u}$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires.** k est appelé le coefficient de colinéarité.

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et l :
$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$ $\quad$ $(k+l)\vec{u} = k\vec{u}+l\vec{u}$ $\quad$ $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$
$k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

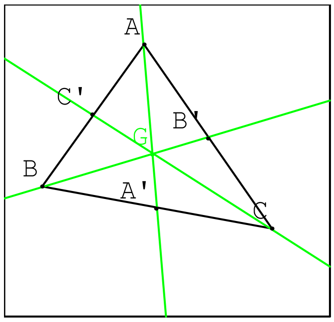
4) Vecteurs et configurations

Milieu d'un segment



Soit I le milieu d'un segment [AB], Alors on peut écrire les égalités vectorielles : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \end{cases}$

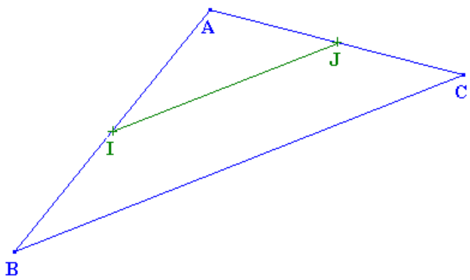
Centre de gravité d'un triangle



Dans un triangle ABC, le point d'intersection G des médianes vérifie :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ $\quad$ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ $\quad$ $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$

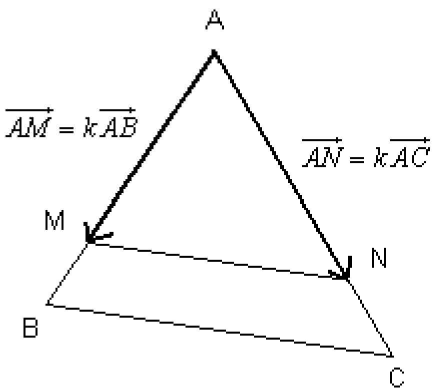
Droite des milieux



Soit ABC un triangle, I le milieu de [AB]et J le milieu de [AC]
Alors $\boxed{\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$
L'expression vectorielle résume à la fois la notion de parallélisme et le rapport des longueurs

Théorème de Thalès vectoriel

Soit ABC un triangle, k un réel, M et N les points tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$
Alors : $\boxed{\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}}$
Preuve :
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$
$= -\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$
$= -k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$
$= k\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$
$= k\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$
$= k\overrightarrow{BC}$



5) Application de la colinéarité aux problèmes de parallélisme et d'alignement

Propriétés:
Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, alors (AB)//(CD)

Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les trois points A,B et C seront alignés

6) Vecteurs coplanaires

Soit O,A,B et C quatre points de l'espace.
Alors O,A,B et C sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels k et l tels que $\boxed{\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}}$