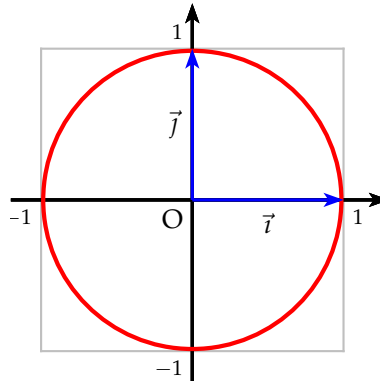


# Trigonométrie

## 1 Angles dans un cercle

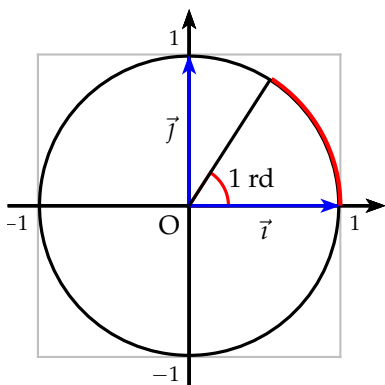
### 1.1 Cercle trigonométrique

**Définition 1 :** On appelle cercle trigonométrique dans un repère orthogonal direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.



### 1.2 Le radian

**Définition 2 :** La radian est une unité de mesure d'un angle comme le degré. Il est défini comme la longueur de l'arc entre 2 points du cercle unité. Le demi cercle unité a une longueur de  $\pi$  et donc correspond à un angle de  $\pi$  radian. On a alors :  $180^\circ = \pi$  rd



La mesure en degré de 1 radian vaut donc :

$$1 \text{ rd} = \frac{180}{\pi} \simeq 57^\circ$$

**Remarque :** Le radian est une grande unité qui n'est pas intuitive contrairement au degré qui est notre unité première.

**Avantage :** Permet de connaître la longueur d'un arc. Unité du système international

Il est important de connaître les angles remarquables en radian :

Degré	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

**Exemple :** Convertir en radian les angles en degré suivants :

$$15^\circ, 36^\circ, 75^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$$



Pour convertir un angle en radian, on utilise la conversion  $180^\circ = \pi$  rd, soit pour  $x$  degré on a :  $\frac{x \pi}{180}$  radian.

On obtient alors :

Degré	$15^\circ$	$36^\circ$	$75^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$
Radian	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

**Exemple :** Convertir en degré les angles en radian suivant :

$$\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{18}, \frac{11\pi}{6}$$

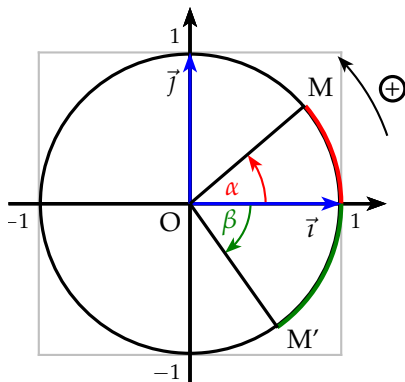


Pour convertir un angle en degré, on utilise la conversion  $180^\circ = \pi$  rd, soit pour  $y$  radian on a :  $\frac{y 180}{\pi}$  degré.

Radian	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{11\pi}{6}$
Degré	$22,5^\circ$	$105^\circ$	$50^\circ$	$330^\circ$

### 1.3 Angles dans le cercle trigonométrique

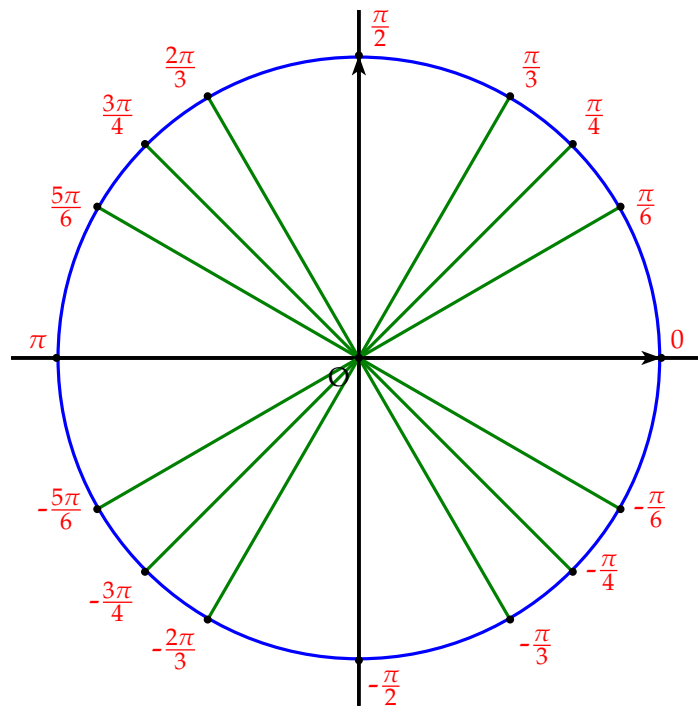
**Definition 3 :** La mesure d'un angle  $\alpha$  repéré par un point  $M$  dans le cercle trigonométrique, est la valeur algébrique de la longueur de l'arc  $AM$  où  $A(1;0)$   
Le sens trigonométrique ou direct correspond au sens antihoraire.



On a représenté deux angles  $\alpha$  et  $\beta$  dont l'un est positif  $\alpha$  et l'autre négatif  $\beta$ .

On remarquera que l'on a indiqué le sens trigonométrique

On peut noter les angles remarquables sur le cercle trigonométrique. Il est important de visualiser l'emplacement des angles pour s'en faire une idée.

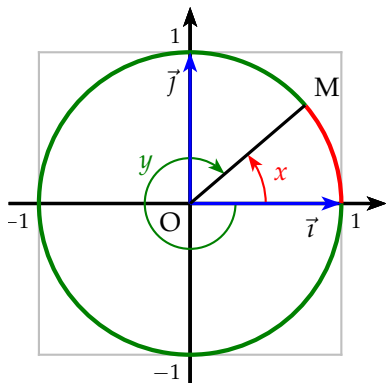


**Propriété 1 :** Un même angle  $\alpha$  peut avoir plusieurs mesures.

Si un angle  $\alpha$ , repéré par le point  $M$  sur le cercle trigonométrique, a comme mesures  $x$  et  $y$ , alors on a la relation suivante :

$$y = x + k2\pi \quad \text{ou plus simplement} \quad y = x [2\pi] \quad y \text{ égal } x \text{ modulo } 2\pi$$

**Exemple :** Soit deux mesures sur le cercle trigonométrique d'un même angle :



Sur la figure ci-contre on a tracé deux mesures d'un même angle repéré par un point  $M$ .

Par exemple  $x = \frac{\pi}{6}$  et  $y = -\frac{11\pi}{6}$ .

En effet :

$$\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{(1+11)\pi}{6} = 2\pi$$

**Définition 4 :** On appelle **mesure principale** d'un angle  $\alpha$ , la mesure  $x$  qui se trouve dans l'intervalle  $] -\pi; \pi]$

**Exemple :** Trouver la mesure principale des angles dont les mesures sont :  $\frac{17\pi}{4}$   
et  $-\frac{31\pi}{6}$

$\frac{17\pi}{4}$  est une mesure trop grande, il faut donc lui enlever un nombre  $k$  de tours ( $2\pi$ ) pour obtenir la mesure principale :

$$\frac{17\pi}{4} - k2\pi = \frac{\pi(17 - 8k)}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{avec } k = 2$$

$-\frac{31\pi}{6}$  est une mesure trop petite, il faut donc lui rajouter un nombre  $k$  de tours ( $2\pi$ ) pour obtenir la mesure principale :

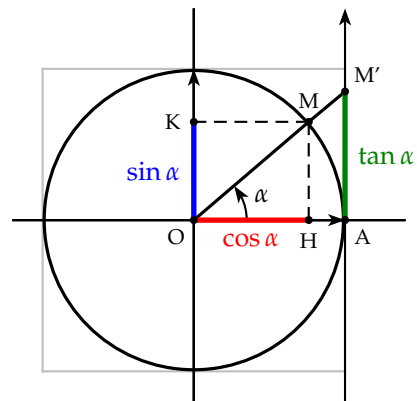
$$-\frac{31\pi}{6} + k2\pi = \frac{\pi(-31 + 12k)}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{avec } k = 3$$

## 2 Lignes trigonométriques

### 2.1 Définitions

**Définition 5 :** Soit un angle  $\alpha$  repéré par un point  $M$  sur le cercle trigonométrique. On appelle :

- $\cos \alpha = \overline{OH}$  projection de  $M$  sur l'axe des abscisses
- $\sin \alpha = \overline{OK}$  projection de  $M$  sur l'axe des ordonnées
- $\tan \alpha = \overline{AM'}$  intersection de  $(OM)$  avec la tangente en  $A$



**Remarque :** Pour tout réel  $x$ , on a :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

### 2.2 Tableau des angles remarquables

Comme déjà vu dans le chapitre sur les configurations, voici le tableau à très bien connaître :

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	?

## 2.3 Relations entre deux angles

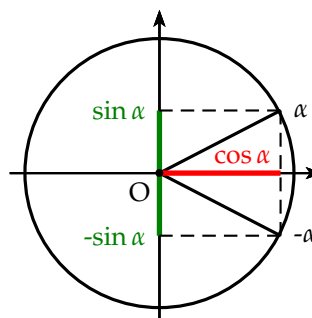
### 2.3.1 Angles opposés

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = +\cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

On peut constater que les fonctions sinus et tangente sont impaires tandis que la fonction cosinus est paire



### 2.3.2 Angles supplémentaires et opposés supplémentaires

Angles supplémentaires

$$\sin(\pi - \alpha) = +\sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

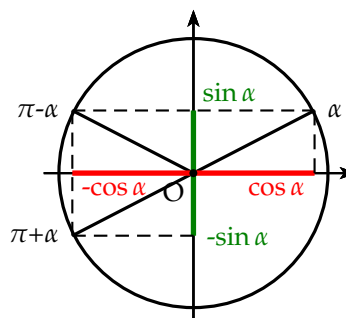
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

Angles opposés supplémentaires

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = +\tan \alpha$$

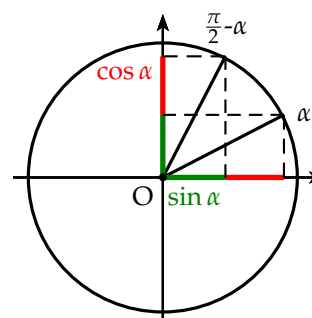


### 2.3.3 Angles complémentaires et opposés complémentaires

Angles complémentaires

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

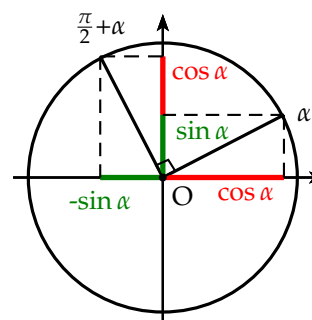
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$



Angles opposés complémentaires

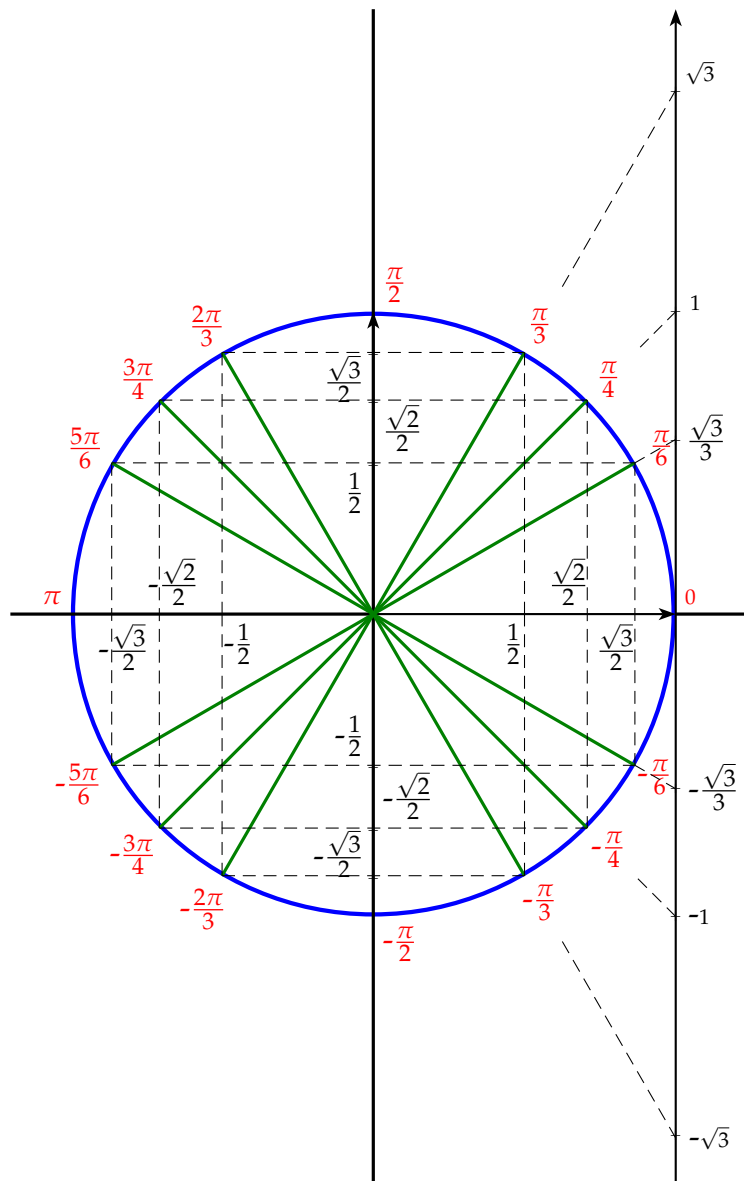
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$



## 2.4 Lignes trigonométriques dans le cercle

Voici sur le cercle trigonométriques l'ensemble des lignes trigonométriques des angles remarquables dans le cercle trigonométrique.



**Exemple :** Calculer le cosinus, le sinus et la tangente des angles suivants :

$$-\frac{\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{4}$$

- Avec  $-\frac{\pi}{3}$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

- Avec  $\frac{5\pi}{6}$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{6} = \tan \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Avec  $\frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

$$\cos \frac{7\pi}{4} = \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} = \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{7\pi}{4} = \tan \left( -\frac{\pi}{4} \right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

### 3 Représentation des fonction sinus, cosinus et tangente

Les courbes des fonction sinus et cosinus s'appelle des sinusoides. Elle sont identiques à une tranlation près.

La courbe de la fonction tangente n'a pas de nom. On peut remarquer que la fonction tangente n'est pas définie en  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

