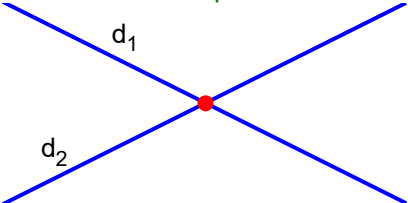
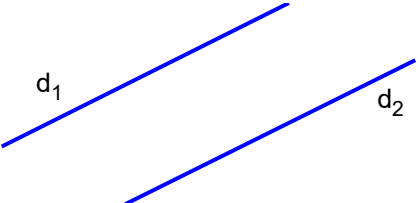
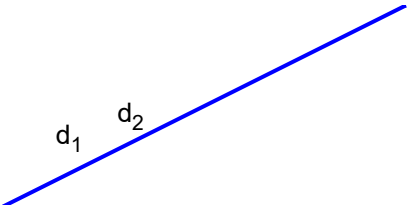
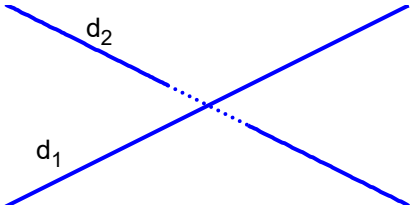


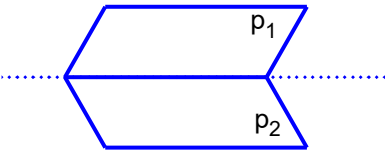
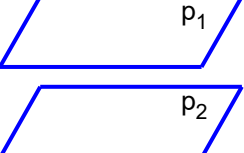

**I Droites et plans de l'espace**

*Positions et intersection de droites et de plans*

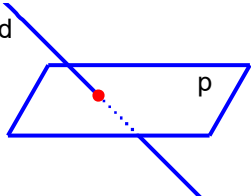

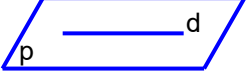
- Deux droites  $d_1$  et  $d_2$  de l'espace peuvent être :

<ul style="list-style-type: none"> <li>• sécantes leur intersection est un point</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• strictement parallèles leur intersection est vide</li> </ul> 
<ul style="list-style-type: none"> <li>• confondues (et donc parallèles) leur intersection est égale à <math>d_1</math> (et à <math>d_2</math>)</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• non coplanaires leur intersection est vide</li> </ul> 

- Deux plans  $p_1$  et  $p_2$  peuvent être :

<ul style="list-style-type: none"> <li>• sécants leur intersection est une droite</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• strictement parallèles leur intersection est vide</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• confondus (et donc parallèles) leur intersection est <math>p_1</math> (et <math>p_2</math>)</li> </ul> 
--	---	---

- Par rapport à un plan  $p$ , une droite  $d$  peut être :

<ul style="list-style-type: none"> <li>• sécante à <math>p</math> leur intersection est un point</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• strictement parallèle à <math>p</math> leur intersection est vide</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• contenue dans <math>p</math> (et donc parallèle à <math>p</math>) leur intersection est <math>d</math></li> </ul> 
---	---	--

*Remarques*

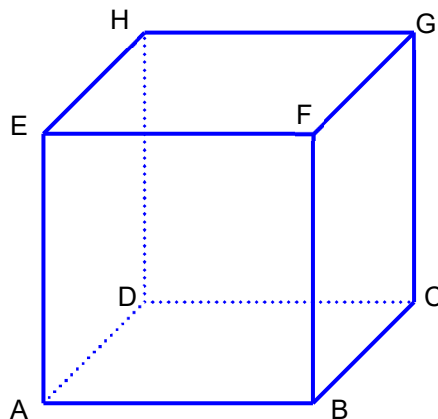
- Dans l'espace, deux droites qui n'ont aucun point commun ne sont pas nécessairement parallèles.
- Il n'est pas possible que deux plans aient un seul point commun.

### Exercice 01

On considère un cube ABCDEFGH.

Citer :

- deux droites sécantes ;
- deux droites strictement parallèles ;
- deux droites non coplanaires ;
- deux plans sécants ;
- deux plans strictement parallèles ;
- une droite sécante à un plan ;
- une droite strictement parallèle à un plan ;
- une droite contenue dans un plan.



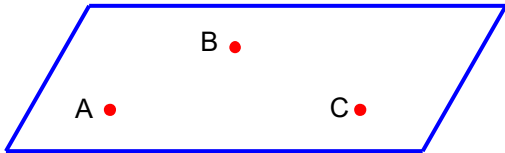
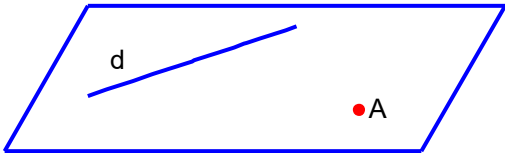
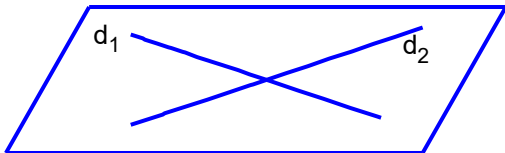
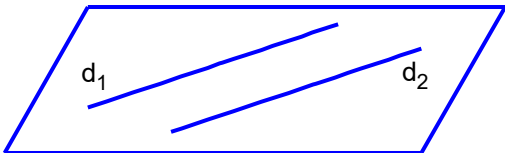
### Exercice 02

Dans le cube de la figure précédente, indiquer (sans justifier) les positions relatives

- 1° des plans (EFA) et (GCD) ;
- 2° des droites (EF) et (HC) ;
- 3° de la droite (DG) et du plan (ABE) ;
- 4° des plans (CDF) et (ABG) ;
- 5° du plan (EHB) et de la droite (DF) ;
- 6° des droites (AG) et (BH).

#### Caractérisation d'un plan

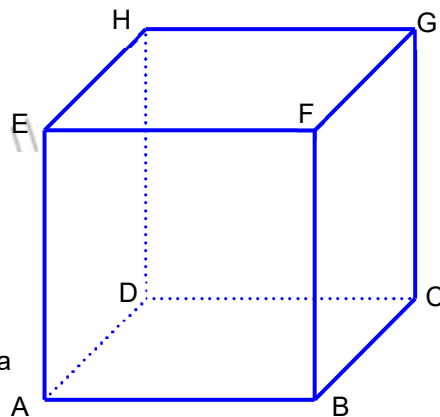
- Dans l'espace il existe un seul plan p

<ul style="list-style-type: none"> <li>• passant par 3 points A, B, C non alignés</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• passant par un point A et contenant une droite d qui ne passe pas par A</li> </ul> 
<ul style="list-style-type: none"> <li>• contenant deux droites sécantes <math>d_1</math> et <math>d_2</math></li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• contenant deux droites strictement parallèles <math>d_1</math> et <math>d_2</math></li> </ul> 

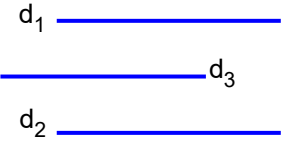
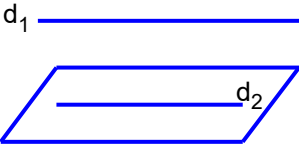
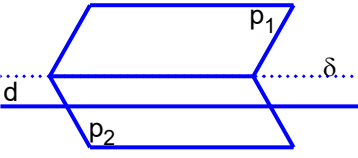
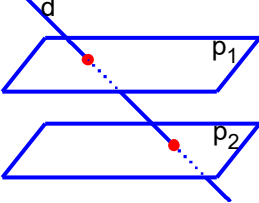

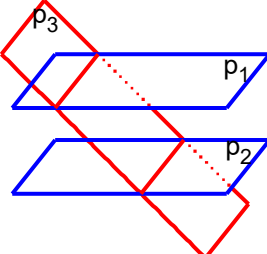
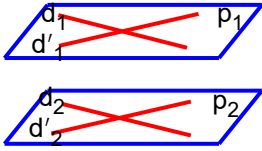
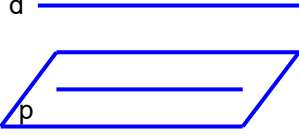
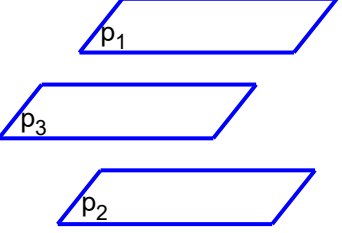
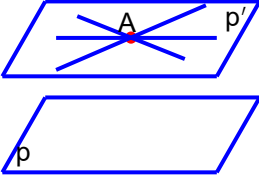
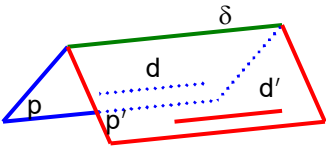
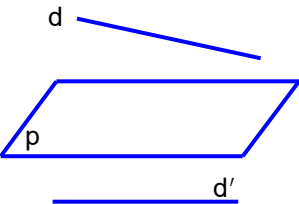
### Exercice 03

On considère un cube ABCDEFGH.

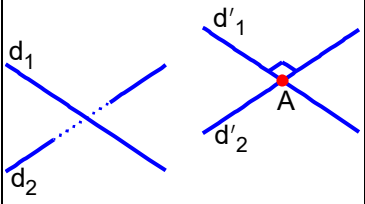
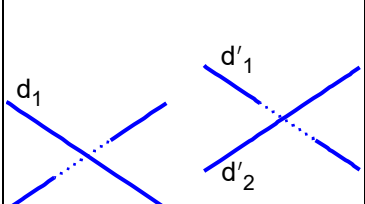
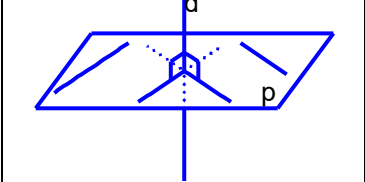
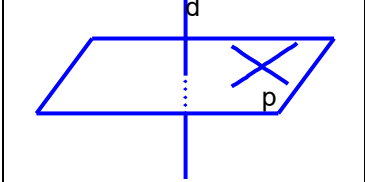
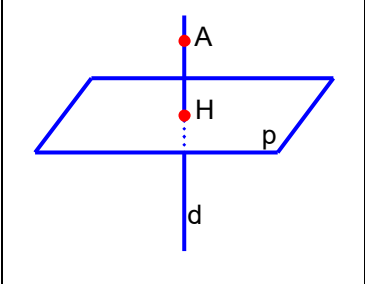
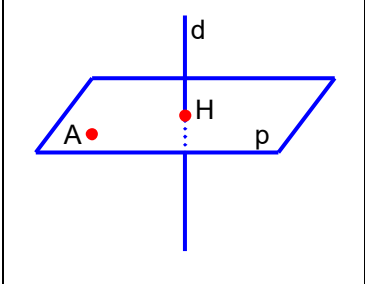
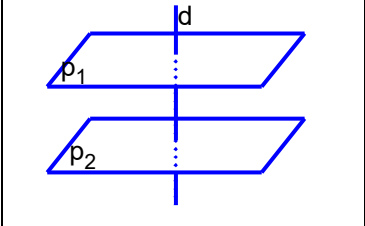
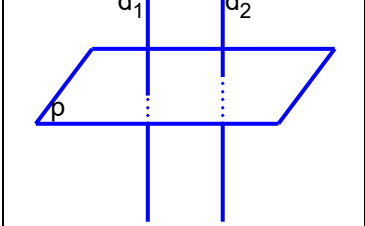
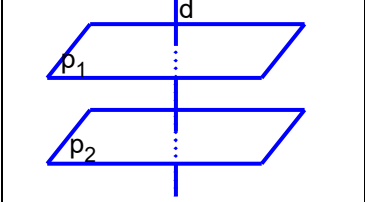
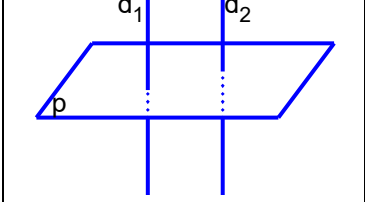
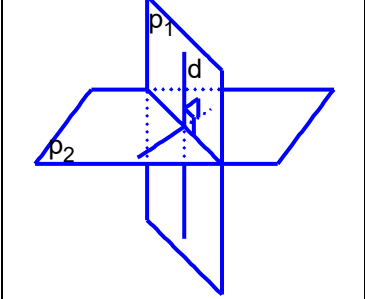
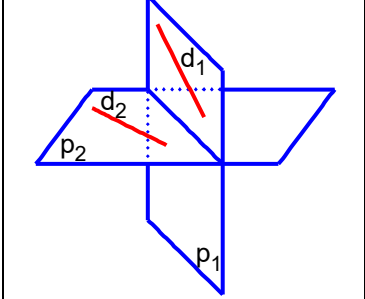
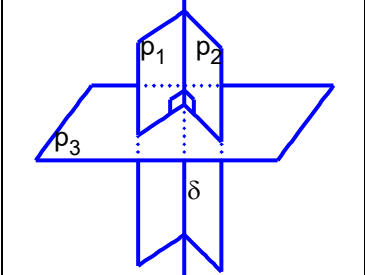
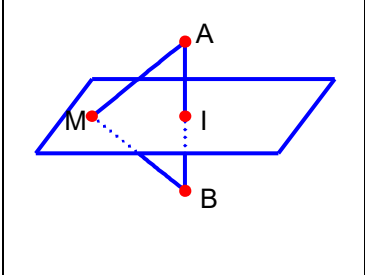
- 1° Justifier que les quatre points A, D, F et G sont coplanaires (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même plan).
- 2° Démontrer que les droites (CE) et (BH) sont sécantes.
- 3° a) Justifier que les droites (BD) et (FH) sont parallèles.  
b) Soient I et J les milieux respectifs de [AB] et [AD].  
Démontrer que les droites (IJ) et (FH) sont parallèles.
- 4° Démontrer que les droites (FI) et (HJ) sont sécantes.  
Soit  $\Omega$  leur point d'intersection.  
Démontrer que  $\Omega A H D$  est un parallélogramme et donner la position de  $\Omega$  par rapport à A et E.



## Parallélisme de droites et de plans

<p>Si deux droites <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont parallèles à une même droite <math>d_3</math> alors <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont parallèles entre elles.</p>		<p>Si deux droites <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont parallèles; alors tout plan contenant <math>d_2</math> est parallèle à <math>d_1</math></p>	
<p>Si deux plans <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont sécants suivant une droite <math>\delta</math>, toute droite <math>d</math> parallèle à <math>p_1</math> et à <math>p_2</math> est parallèle à <math>\delta</math></p>		<p>Si deux plans <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont parallèles, toute droite <math>d</math> sécante à <math>p_1</math> est aussi sécante à <math>p_2</math></p>	
<p>Si deux plans <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont parallèles, toute droite <math>d</math> contenue dans <math>p_1</math> est parallèle à <math>p_2</math>.</p>		<p>Si deux plans <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont parallèles, tout plan <math>p_3</math> sécant à <math>p_1</math> est aussi sécant à <math>p_2</math> et les droites d'intersection sont parallèles.</p>	
<p>Pour que deux plans <math>p_1</math> et <math>p_2</math> soient parallèles, il suffit que <math>p_1</math> contiennent deux droites sécantes <math>d_1</math> et <math>d'_1</math> respectivement parallèles à deux droites sécantes <math>d_2</math> et <math>d'_2</math> de <math>p_2</math>.</p>		<p>Pour qu'une droite <math>d</math> soit parallèle à un plan <math>p</math>, il suffit que <math>d</math> soit parallèle à une droite de <math>p</math>.</p>	
<p>Si deux plans <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont parallèles à une même plan <math>p_3</math> alors <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont parallèles entre eux.</p>		<p>Étant donné un plan <math>p</math> et un point <math>A</math>, il existe un et un seul plan <math>p'</math> passant par <math>A</math> et parallèle à <math>p</math>, ce plan contient toutes les droites passant par <math>A</math> et parallèles à <math>p</math>.</p>	
<p><u>Théorème du toit</u> Si deux droites parallèles <math>d</math> et <math>d'</math> sont dans des plans <math>p</math> et <math>p'</math> sécants suivant une droite <math>\delta</math>, alors <math>d</math> et <math>d'</math> sont parallèles à <math>\delta</math>.</p>		<p><b>Attention</b> Si <math>d</math> est parallèle à <math>p</math> et si <math>d'</math> est parallèle à <math>p</math>, on ne peut pas en déduire que <math>d</math> est parallèle à <math>d'</math>.</p>	

## Orthogonalité de droites et de plans

<p>Deux droites <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont orthogonales si leurs parallèles respectives <math>d'_1</math> et <math>d'_2</math> passant par un même point A sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.</p>		<p>Si deux droites <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont orthogonales, toute parallèle <math>d'_1</math> à <math>d_1</math> est orthogonale à toute parallèle <math>d'_2</math> à <math>d_2</math>.</p>	
<p>Une droite <math>d</math> est perpendiculaire à un plan <math>p</math> si elle est orthogonale à toutes les droites de <math>p</math>.</p>		<p>Pour qu'une droite <math>d</math> soit perpendiculaire à un plan <math>p</math> il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de <math>p</math>.</p>	
<p>Par un point A il passe une et une seule droite <math>d</math> perpendiculaire à un plan <math>p</math> donné. Le point d'intersection H de <math>d</math> et de <math>p</math> est appelé projeté orthogonal de A sur <math>p</math>.</p>		<p>Par un point A il passe un et un seul plan <math>p</math> perpendiculaire à une droite <math>d</math> donnée. Le point d'intersection H de <math>d</math> et de <math>p</math> est appelé projeté orthogonal de A sur <math>d</math>.</p>	
<p>Si deux plans <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont parallèles, toute droite <math>d</math> perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.</p>		<p>Si deux droites <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont parallèles, tout plan <math>p</math> perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.</p>	
<p>Si deux plans <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont perpendiculaires à une même droite <math>d</math>, alors <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont parallèles.</p>		<p>Si deux droites <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont perpendiculaires à un même plan <math>p</math>, alors <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont parallèles.</p>	
<p>Deux plans <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont perpendiculaires si l'un d'eux contient une droite <math>d</math> perpendiculaire à l'autre.</p>		<p><b>Attention</b> Si <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont deux plans perpendiculaires, une droite <math>d_1</math> quelconque de <math>p_1</math> n'est pas orthogonale à une droite <math>d_2</math> quelconque de <math>p_2</math>.</p>	
<p>Si des plans sécants <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont tous deux perpendiculaires à un même plan <math>p_3</math>, alors la droite <math>\delta</math> d'intersection de <math>p_1</math> et <math>p_2</math> est perpendiculaire à <math>p_3</math>.</p>		<p>Le plan médiateur d'un segment <math>[AB]</math> est le plan passant par le milieu de <math>[AB]</math> et perpendiculaire à la droite <math>(AB)</math>. C'est l'ensemble des points M équidistants de A et de B.</p>	

### Exercice 04

On considère un cube ABCDEFGH.

- 1°) Justifier que les droites (HE) et (EB) sont perpendiculaires.
- 2°) Les droites (GE) et (EB) sont-elles perpendiculaires ?
- 3°) Que peut-on dire des droites (HE) et (FA) ?
- 4°) Justifier que la droite (EG) est parallèle au plan (ABCD).
- 5°) Justifier que la droite (DB) est perpendiculaire au plan (EAG).
- 6°) Justifier que la droite (HB) est sécante au plan (EGC).

Construire leur point d'intersection.

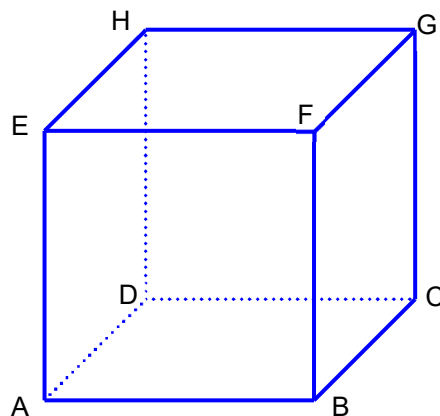
7°) Soient I et J les milieux de [AB] et [AE].

- a) Justifier que (IJ) est parallèle au plan (BCH).
- b) Justifier que (IJ) et (BF) sont sécantes.

Construire leur point d'intersection.

c) Justifier que (IJ) est sécante au plan (DBF).

Construire leur point d'intersection.



### Remarques

Les constructions d'intersections dans l'espace se feront en ne perdant pas de vue que :

- Deux droites qui paraissent sécantes sur un dessin ne le sont pas nécessairement. Pour justifier qu'elles sont effectivement sécantes, il faut justifier que ces droites sont coplanaires.
- L'intersection de deux plans sécants est une droite. Le dessin des deux plans n'est pas suffisant pour faire apparaître leur droite d'intersection. (Il faudra souvent utiliser des intersections de droites contenues dans les plans)
- Lorsque deux plans sont parallèles, leurs droites d'intersection avec un même troisième plan sont des droites parallèles.

### Exercice 05

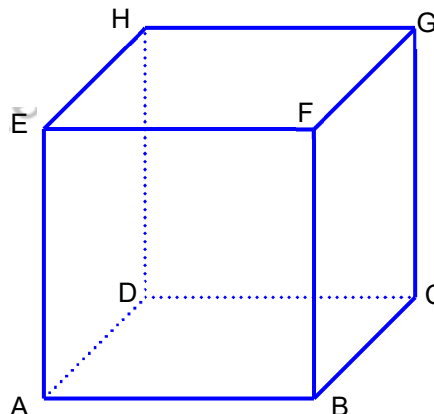
On considère un cube ABCDEFGH.

Soit I le milieu de [AB] et K le point défini par  $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{4} \overrightarrow{GH}$ .

Un plan  $p$  coupe la face ABCD suivant [DI] et la face DCGH suivant [DK].

Montrer que l'intersection de  $p$  avec la face ABFE est parallèle à [DK]. Tracer cette intersection.

Déterminer et tracer l'intersection de  $p$  avec les autres faces du cube.

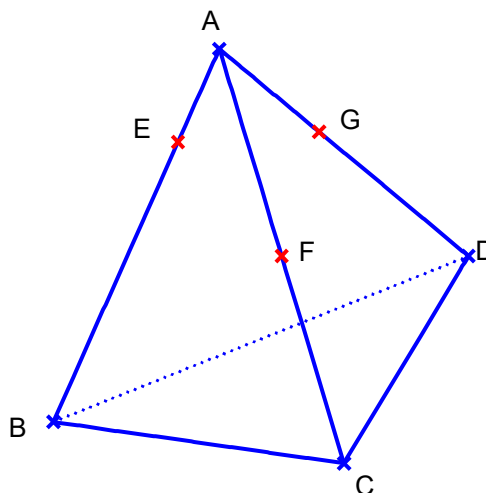


### Exercice 06

On considère le tétraèdre ABCD représenté ci-contre.

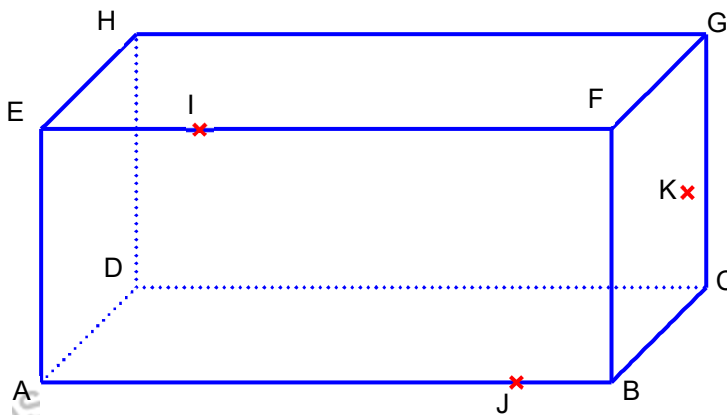
Les points E, F et G appartiennent respectivement aux arêtes [AB], [AC], [AD].

Construire l'intersection du plan (EFG) avec le plan (BCD). (On justifiera la construction)



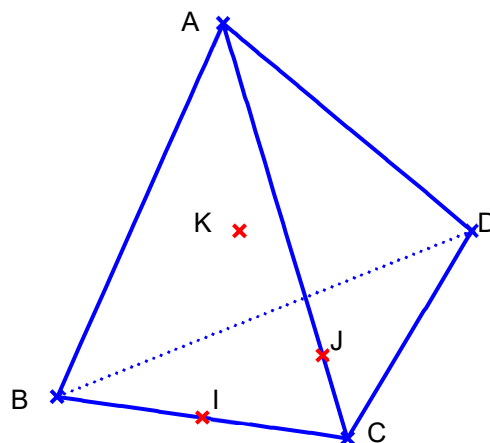
### Exercice 07

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle (pavé droit).  
 I est un point de l'arête [EF].  
 J est un point de l'arête [AB].  
 K est un point de la face (BCGF).  
 Voir figure ci-contre.  
 Représenter l'intersection du plan (IJK) avec les faces du parallélépipède rectangle.  
 Tracer la droite d'intersection du plan (IJK) et du plan (ADHE).  
 (Les constructions seront justifiées)



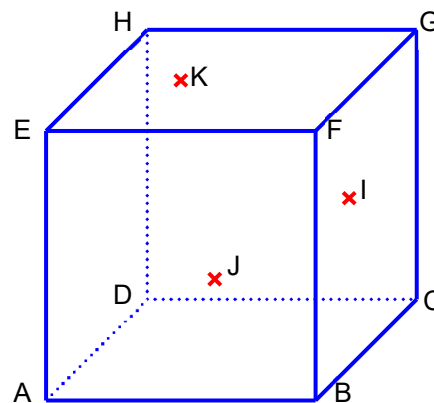
### Exercice 08

On considère le tétraèdre ABCD représenté ci-contre.  
 Les points I et J appartiennent respectivement aux arêtes [BC] et [AC].  
 Le point K est sur la face (ABD).  
 Construire l'intersection du plan (IJK) avec les faces du tétraèdre ABCD. (On justifiera la construction)



### Exercice 09

On considère un cube ABCDEFGH.  
 Les deux questions sont indépendantes.  
 1°) Le point I est un point de la face (BCGF).  
 Le point J est un point de la face (ABFE).  
 Le point K est un point de la face (EFGH).  
 (Voir figure)  
 Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (EFGH).  
 En déduire l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube.  
 (On justifiera les constructions)  
 2°) On suppose maintenant que I, J et K sont les centres respectifs des faces (BCGF) ; (ABFE) et (EFGH).  
 Quelle est la nature du triangle IJK ? (justifier)  
 Démontrer que F est équidistant des points I, J et K.  
 Démontrer que D est équidistant des points I, J et K.  
 En déduire que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (IJK).



### Exercice 10

On considère un cube ABCDEFGH.  
 Les deux questions sont indépendantes.  
 1°) Le point J est un point de l'arête [FG].  
 Le point K est un point de l'arête [AB].  
 Le point L est un point de l'arête [DH].  
 (Voir figure)  
 Construire l'intersection du plan (JKL) avec les faces du cube.  
 (On justifiera les constructions)  
 2°) On suppose que J, K et L sont les milieux respectifs de [FG] ; [AB] et [DH].  
 Démontrer que la droite (EC) est perpendiculaire au plan (JKL).  
 Démontrer que JKL est un triangle équilatéral.

